<36635622090019

<36635622090019

Bayer. Staatsbibliothek

3651 Bibl. Mont I 4

Lehrbuch
der
Arithmetik
zum
Gebrauche in den Schulen
und
zum Selbstunterrichte,
von

Johann von Gott Bundschue,

Professor der Mathematik und der Naturwissenschaften an dem kön. baier. Gymnasium zu Kempten, wie auch korrespondirendem Mitgliede der allgemeinen kameralistisch-ökonomischen Gesellschaft zu Erlangen, und ordentlichem Mitgliede des landwirthschaftl. Vereins in Baiern.

Vierter Theil,

welcher die allgemeinen Quadrirungs- und Kubirungs-Gesetze mit den daraus für die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln abgeleiteten Regeln, dann die Auflösung einfacher Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen, und die der quadratischen und unbestimmten, wie auch die arithmetischen und geometrischen Verhältnisse, Proportionen und Progressionen, die Lehre von den Logarithmen, und das newtonianische Binomium sammt den Permutationen und Kombinationen enthält.

Kempten, 1817.

gedruckt und im Verlag bei Dannheimer.

Seiner Gnaden

dem

Hochwohlgebornen Königlich Baierischen

General-Kommissär des Illerkreises,

Herrn

Joseph von Stichaner,

Kommandeur des Verdienst-Ordens
der Baierischen Krone,

und

Mitgliede der Königlichen Akademie der Wissenschaften
zu München,

widmet

dieses Denkmal

tiefer Ehrfurcht

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Der Verfasser.

Euere Gnaden,

Hochwohlgeborner

Herr General-Kommissär!

Die hohe Ehre, Euere Gnaden unter meine vorzüglichsten und reelsten Gönner zählen zu dürfen, die Gnade und Auszeichnung, und die wiederholten Beweise von Gewogenheit und Freundschaft, womit Sie mich bei so vielen Gelegenheiten überhäuft haben, flößen mir den Muth ein, Ihnen öffentlich meine grenzenlose Verehrung, und meine tiefgerührte Dankbarkeit zu bezeugen, und Sie zu bitten, mit Ihrem erhabenen, der gelehrten Welt, dem Staate, und vor allem unserer Studien-Anstalt so werthen Namen mein vorliegendes Werkchen verherrlichen zu dürfen.

Mögen Euere Gnaden durch Ihre geltende Protektion den Schluß-

stein setzen meinem, unter Ihren Auspizien begonnenen, und bis dahin gediehenen, kleinen Lehrgebäude der Mathematik.

Unter die großen Vortheile, die ich aus Ihrer mir zugewürdigten Vertrautheit schöpfte, gehört besonders die gründliche Ueberzeugung, daß Sie ganz bestimmt Schöpfer eines weit vollkommenern Werkes der mathematischen Muse sein könnten und würden; hätte Sie das Loos anstatt in die vollwichtigsten Funktionen des Staats-Organismus auf das Katheder der Ihrem genialen Universalgeiste nie fremd gewordenen Wissenschaft gestellt. Mit Bewunderung verehre ich die tiefen Kenntnisse, welche Euere Gnaden,

neben der Fülle anderer, in dem erhabenen Fache der Mathematik bethätigten, und verspreche mir mit Recht von Ihrer heißen Neigung und Vorliebe für diese vorzügliche Erzieherinn des Menschengeistes auch in Zukunft die herrlichsten Früchte Ihrer Protektion zur Aufnahme, und zum Gedeihen dieser Kunst-Wissenschaft. Dieser Zukunft gewiß, werde ich unermüdet meine geringen Kräfte der Bearbeitung eines Feldes weihen, das mir in Erfüllung meiner Amtspflicht so schöne Früchte Ihrer Huld verheißt. Und — beglückt Ihr Beifall meine Bemühungen, so bin ich im vollsten Maaße belohnt, zugleich triumphirend entschädigt gegen die unlautern Umtriebe der Schelsucht,

die ja dem Manne von reinverdienstlicher Tendenz auf dieser sublunarischen Welt hienieden wohl niemal fehlen.

Genehmigen Euere Gnaden den Ausdruck der tiefsten Ehrerbiethung, womit ich mich nenne

Euerer Gnaden

Kempten,
den 24. August 1816.

dankschuldigster,
ganz gehorsamster
Diener
Professor Bundschue.

Vorrede.

Ich bearbeitete im Jahre 1813 die drei ersten Theile dieses Werkes, die an den königlichen Studienanstalten zu Kempten und Memmingen beim öffentlichen Unterrichte als Lehrbuch eingeführt wurden, und alle jene mathematischen Zweige enthalten, die nach dem allerhöchsten Normativ, und den allerhöchsten allgemeinen Beschlüssen, ddto. München den 31. Jäner 1813, in den königlich baierschen Studienschulen zu lehren sind.

Meine Tendenz war damals dahin gerichtet, für die königlichen Studienschulen des Illerkreises ein brauchbares Lehrbuch zu verfassen, weil sich das diesortige königliche Gymnasium, an dem ich den mathematischen Unterricht nach der nämlichen Methode fortsetze, unmittelbar an dieselben anschließt, und auf diese Weise nach den allerhöchsten Vorschriften, ddto. München den 25. Juli 1810, ein regelmäßiges Fortschreiten von Klasse zu Klasse bewirkt, und ein durchgängig zusammenhängender Stufengang des Unterrichtes eingehalten wird.

Meine Schrift wurde nach einem allerhöchsten Reskripte, ddto. München den 31. Oktober 1813, von der allerhöchsten Stelle mit Wohlgefallen aufgenommen, und von den Herren Professoren der genannten Studienschulen als ein für ihre Klassen zweckmäßig bearbeitetes Lehrbuch anerkannt, während dieselbe zugleich in mehreren Werken, wie auch im königlich baierischen Intelligenzblatte des Illerkreises (XLVIII. Stück, Seite 769 — 772. Kempten, Dienstag den 30. Nov. 1813.), und in dem allgemeinen Kameral-Korrespondenten (Erlangen, den 15. Sept. 1814. — Nro. 107. Seite 429 und 430.) zum Gebrauche in den Schulen und zum Selbstunterrichte bestens empfohlen wurde.

Aufgemuntert durch diesen Beifall, setzte ich in diesem Studienjahre das Werk fort, indem ich den gegenwärtigen IV. Theil der Presse übergab, welcher mit Einschluß der von mir im Jahre 1812 zur Begründung und Anwendung des reesischen Ansatzes herausgegebenen Anleitung jene Theile der höheren Arithmetik enthält, welche nach den allerhöchsten Vorschriften in den Gymnasialklassen zu lehren sind.

Durch diesen IV. Theil ist jetzt meinen Schülern in der unteren, und Mittel-Klasse des Gymnasiums ein anderwärtiges Lehrbuch der Arithmetik entbehrlich gemacht, das sie sich sonst anschaffen müßten, um die für das Gymnasium vorgeschriebenen algebraischen Zweige studiren zu können, und

ich habe dabei den großen Vortheil, daß ich die Algebra nach meinem eigenen Lehrbuche, und zwar nach dem nämlichen vortragen kann, nach welchem die Schüler in den Studienschulen in der niederen Arithmetik schon mehrere Jahre zur Vorbereitung unterrichtet wurden.

Wie die erste Auflage der erwähnten Abhandlung über den reesischen Ansatz, welche in einer anderen Schrift, und in einem etwas kleineren Format erschienen ist, vollends vergriffen ist, so bilde ich aus der zweiten Auflage derselben den V. Theil meines Lehrbuches, in den ich dann nebst der praktischen Proportions-Lehre, und der auf die Berechnung der Zinses-Zinse angewandten Progressions-Lehre einige höhere algebraische Zweige aufnehme, welche in diesem Lehrbuche noch nicht vorkommen.

Im vorliegenden IV. Theile sollte das fünfte Hauptstück unmittelbar auf das erste folgen, weil in diesem die allgemeinen Quadrirungs- und Kubirungs-Gesetze aufgestellt sind, und in jenem der newtonianische Lehrsatz vorgetragen wird; ich machte aber absichtlich diese Trennung, weil die bei diesem Lehrsatze vorkommenden Formeln und Beweise etwas schwer sind, und derselbe mit den in dem zweiten, dritten und vierten Hauptstücke abgehandelten Gegenständen in keiner Verbindung steht.

Bei der im §. 48. ausgeführten Entwickelung der geometrischen Progressions-Formeln kommen diejenigen auch vor, bei welchen die unbekannten

Stücke durch Logarithmen bestimmt werden, weil ich in der Folge hierzu keine schickliche Veranlassung mehr gehabt hätte; man muß deßhalb, da die Lehre von den Logarithmen noch nicht vorausgeht, die Enlwickelung derselben bis zum Schlusse des vierten Hauptstückes, in welchem die Logarithmen vorgetragen werden, verschieben.

Ich benützte bei der Bearbeitung dieses IV. Theiles nebst den in den vorausgehenden Theilen angezeigten Schriften, und den mathematischen Werken von Pickel, Beda Mayr, Schulz, Danzer, Zeiler, Ranson, Winterfeld, Schäblen ꝛc. ganz vorzüglich die Hefte, die ich mir an dem königl. baier. Lyzeum zu Dilingen sammelte, als ich mehrere Jahre den öffentlichen Vorlesungen des kön. baier. Herrn Kollegien-Rathes und Professors D. Ferdinand Mahir beiwohnte. Wenn ich als öffentlicher Lehrer der Mathematik, und auch als Schriftsteller zur Verbreitung nützlicher Kenntnisse etwas beitrage, so verdanke ich es ursprünglich diesem vortrefflichen, mir immer unvergeßlichen Lehrer, der mit den gründlichsten und umfassendsten Kenntnissen einen besonders glücklichen Vortrag zu vereinigen, und seine Schüler ganz für das Fach, das er auf eine so ausgezeichnete Weise lehrte, zu gewinnen wußte.

Kempten den 24. August 1816.

Professor Bundschue.

Inhalt.

I. Hauptstück.

Von dem Quadrate und der Quadratwurzel, wie auch von dem Kubus und der Kubikwurzel mehrtheiliger Größen.

I. Abschnitt.

Von dem Quadrate und der Quadratwurzel mehrtheiliger Größen.

Das allgemeine Quadrirungsgesetz sammt den Regeln für die Ausziehung der Quadratwurzeln in der Buchstabenrechnung . . . . Seite 1. §. 1. bis §. 2.

Die Begründung der Regeln für die Ausziehung der Quadratwurzeln in Zahlen . . S. 7. §. 3 — §. 7.

II. Abschnitt.

Von dem Kubus und der Kubikwurzel mehrtheiliger Größen.

Das allgemeine Kubirungsgesetz sammt den Regeln für die Ausziehung der Kubikwurzeln in der Buchstabenrechnung . . . . . S. 19. §. 8. — §. 9.

Die Begründung der Regeln für die Ausziehung der Kubikwurzeln in Zahlen . . S. 24. §. 10. — §. 14.

II. Hauptstück.

Von den Gleichungen.

I. Abschnitt.

Von der Auflösung einfacher Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen.

Die Auflösung einfacher Gleichungen mit zwei unbekannten Größen . . . . . . S. 37. §. 15.

Die Auflösung einfacher Gleichungen mit wie immer vielen unbekannten Größen . . S. 44. §. 16. — §. 17.
Die Auflösung einiger unbestimmter Gleichungen S. 58. §. 18.

II. Abschnitt.

Von der Auflösung der quadratischen Gleichungen.

Erklärungen, und die Auflösung reiner quadratischer Gleichungen . . . . S. 66. §. 19. — §. 20.
Die Auflösung gemischter quadratischer Gleichungen S. 68. §. 21. — §. 22.

III. Hauptstück.

Von den arithmetischen und geometrischen Verhältnissen, Proportionen und Progressionen.

I. Abschnitt.

Von den arithmetischen Verhältnissen und Proportionen.

I. Von den arithmetischen Verhältnissen. S. 80. §. 23.
II. Von den arithmetischen Proportionen S. 82. §. 24. — §. 26.

II. Abschnitt.

Von den arithmetischen Progressionen.

Lehrsätze in Absicht auf diese Reihen S. 90. §. 27. — §. 30.
Entwickelung der 20 Formeln zur Auflösung der bei den arithmetischen Reihen vorkommenden Aufgaben S. 96. §. 31.
Tabelle, welche diese Formeln enthält . S. 101. — 103.
Beispiele zur Benützung dieser Formeln . S. 104. §. 32.

III. Abschnitt.

Von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen.

I. Von den geometrischen Verhältnissen S. 112. §. 33. — §. 34.
II. Von den geometrischen Proportionen S. 117. §. 35. — §. 44.

IV. Abschnitt.

Von den geometrischen Progressionen.

Lehrsätze in Absicht auf diese Reihen S. 144. §. 45. — §. 47.
Entwickelung der 20 Formeln der geometrischen Reihen S. 152. §. 48.
Tabelle, welche diese Formeln enthält . S. 158. — 160.
Beispiele zur Uebung . . . . . S. 162. §. 49.

V. Abschnitt.

Von der Summirung einiger unendlicher Reihen.

Lehrsatz sammt einigen Aufgaben in Absicht auf solche Reihen S. 168. §. 50. — §. 54.

IV. Hauptstück.

Von den Logarithmen.

I. Abschnitt.

Von den Logarithmen überhaupt.

Erklärungen und Lehrsätze in Betreff der Logarithmen S. 179. §. 55. — §. 60.

II. Abschnitt.

Von den briggischen Logarithmen, und zwar von ihren vorzüglichsten Eigenschaften und ihrer Berechnung.

Erklärungen in Absicht auf die briggischen Logarithmen S. 187. §. 61.
Ihre Berechnung durch Proportionen S. 190. §. 62. — §. 63.

III. Abschnitt.

Vom Gebrauche der Tabellen der gemeinen oder briggischen Logarithmen.

Anweisung, die Logarithmen für alle Zahlen zu finden S. 194. §. 64. — §. 68.
Anweisung, für jeden Logarithmus die entsprechende Zahl zu finden . . . . S. 202. §. 69. — §. 72.
Bestimmung der dekadischen Ergänzung eines Logarithmus S. 208. §. 73.

IV. Abschnitt.

Anwendung der briggischen Logarithmen auf die Rechnungen mit Ziffern.

Aufgaben, nach welchen durch Logarithmen gemeine Brüche in Dezimalbrüche verwandelt, wie auch Zahlen multiplizirt, dividirt, potenzirt und depotenzirt werden können S. 209. §. 74. — §. 79.
Die Auflösung der Gleichungen, wo die unbekannte Größe als Exponent einer Potenz oder Wurzel vorkömmt S. 214. §. 80.
Auflösung einiger bei den geometrischen Reihen vorkommender Aufgaben mittels der Logarithmen S. 216. §. 81.

V. Hauptstück.

Von dem binomischen Lehrsatze, wie auch von den Permutationen und Kombinationen.

I. Abschnitt.

Von dem binomischen Lehrsatze.

Erklärung sammt den allgemeinen Gesetzen des binomischen Lehrsatzes . . . . S. 220. §. 82. — §. 83.
Bezeichnung dieser Gesetze durch Formeln S. 222. §. 84.
Beweis für die allgemeine Giltigkeit dieser Gesetze S. 230. §. 85. — §. 88.
Entwickelung einiger bequemerer Formeln S. 241. §. 89.
Aufgaben zur Uebung im Potenziren und Depotenziren mehrtheiliger Größen . . S. 242. §. 90. — §. 91.

II. Abschnitt.

Von den Permutationen und Kombinationen.

Erklärungen . . . . . . S. 251. §. 92.
Lehrsätze zur Bestimmung der Permutationen, Kombinationen und Variationen . . S. 252. §. 93. — §. 97.

I. Haupt=

I. Hauptstück.

Vom Quadrate und der Quadratwurzel, wie auch vom Kubus und der Kubikwurzel mehrtheiliger Größen.

I. Abschnitt.

Vom Quadrate und der Quadratwurzel mehrtheiliger Größen.

§. 1.

Das allgemeine Quadrirungs-Gesetz.

Lehrsatz: Das Quadrat einer jeden zweitheiligen Größe besteht aus dem Quadrate des ersten Theiles, dem doppelten Produkte des ersten Theiles in den zweiten, und aus dem Quadrate des zweiten Theiles; d. h.,

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, und

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Beweis:

1) Eine Größe zum Quadrate erheben oder quadriren heißt sie zweimal als Faktor setzen (III. §. 25. e.), daher ist $(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b)$, und $(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b)$;

2) Multiplizirt man wirklich nach den im III. Theile des Lehrbuches §. 80. aufgestellten Regeln $a + b$ mit $a + b$, und $a - b$ mit $a - b$, so erhält man zum Produkte im ersten Falle $a^2 + 2ab + b^2$, und

im zweiten $a^2 - 2ab + b^2$, wie aus Nachstehendem ersichtlich ist:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \qquad\qquad \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2, \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \qquad\qquad \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2; \end{array}$$

3) Diese beiden Produkte sind ganz dem aufgestellten Gesetze gemäß, indem $a^2 = (a)^2$, $2ab = 2 (a \times b)$, und $b^2 = (b)^2$, ferner $a^2 = (a)^2$, $-2ab = 2 (a \times - b)$, und $b^2 = - b \times - b$;

4) Die beiden Ausdrücke $a + b$ und $a - b$ sind allgemein giltige Ausdrücke, und bezeichnen jede zweitheilige oder zweigliederigte Größe (III. §. 43. b.).

Um deswillen besteht das Quadrat einer zweitheiligen Größe allemal aus dem Quadrate des ersten Theiles, dem doppelten Produkte des ersten Theiles in den zweiten, und aus dem Quadrate des zweiten Theiles; daher ist z. B. $8^2 = (6 + 2)^2 = 36 + 24 + 4 = 64$, und $6^2 = (8 - 2)^2 = 64 - 32 + 4 = 36$.

I. Zusatz: Das Quadrat einer dreitheiligen Größe besteht aus dem Quadrate des ersten Theiles, dem zweifachen Produkte des ersten Theiles in den zweiten, und dem Quadrate des zweiten Theiles, wie auch aus dem zweifachen Produkte des ersten und zweiten Theiles in den dritten, und aus dem Quadrate des dritten Theiles; d. h., $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2 (a + b) c + c^2$.

Zur Beweisführung setze man die Summe der beiden ersten Theile, somit $a + b = m$, und quadrire nach dem Lehrsatze die zweitheilige Größe $m + c$, man erhält $m^2 + 2mc + c^2$; dann setze man anstatt m den gleichen Ausdruck $a + b$, wie auch $a^2 + 2ab + b^2$ anstatt m^2, und man bekömmt das verlangte Quadrat, nämlich $(a + b + c)^2 = (m \dagger c)^2 = m^2 + 2mc + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2 (a + b) c + c^2$.

II. Zusatz: Da man immer alle vorausgehenden Theile einer mehrtheiligen Größe als den ersten, und den folgenden Theil derselben als den zweiten Theil

einer zweigliederigten Größe betrachten kann, so ist das Quadrat einer jeden mehrtheiligten Größe dem Quadrate eines jeden Theiles, und dem zweifachen Produkte aller vorausgehenden Theile in jeden folgenden Theil gleich; z. B.
$(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)$
$c + c^2 + 2(a + b + c)^2 d + d^2.$

Setzet man $a + b + c = m$, so ist $(a + b + c + d)^2 = (m + d)^2 = m^2 + 2md + d^2$, und also nach dem I. Zusatze $(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2$.

III. Zusatz: Wenn man aus einer mehrtheiligen Größe die Quadratwurzel ausziehen soll (III. §. 25. g.), so muß sie unter diesen Formeln enthalten sein, d. h., in ihr müssen alle Theile derselben vorkommen. Findet dieses statt, so hat man ein vollständiges, oder vollkommenes Quadrat; im Gegentheile hat man aber ein unvollständiges oder unvollkommenes Quadrat, wenn ein Theil oder mehrere Theile fehlen, welche nach der Formel da sein sollen: so ist z. B. $x^2 + px + \frac{1}{4} p^2$ ein vollkommenes Quadrat, dagegen aber $x^2 + px$ ein unvollkommenes, weil $(x + \frac{1}{2} p)^2 = x^2 + px + \frac{1}{4} p^2$, und im letzteren Falle das Quadrat des zweiten Theiles $\frac{1}{4} p^2$ oder $\frac{p^2}{4}$ mangelt.

Anmerkung: 1) Was man unter ein- und mehrgliederigten Größen versteht, ist im III. Theile des Lehrbuches §. 45. II. Zusatz schon gesagt worden.

2) Im IV. Abschnitte des II. Hauptstückes dieses nämlichen Theiles sind die Regeln schon vorgetragen worden, nach welchen eingliederigte Größen potenzirt und depotenzirt werden.

§. 2.

Die Regeln für die Ausziehung der Quadratwurzel bei vieltheiligen Größen in der Buchstabenrechnung.

Aus einer mehrtheiligen Größe wird die Quadratwurzel ausgezogen, wenn man jene Größe findet, die

zweimal als Faktor gesetzt zum Produkte das gegebene Quadrat wieder gibt (III. §. 25. c. u. g.); daher ergeben sich aus dem im vorigen §. aufgestellten allgemeinen Quadrirungsgesetze folgende Regeln für die Ausziehung der Quadratwurzel in der Buchstaben-Rechnung;

1) Man ordne so die Glieder nach einer in denselben vorkommenden Potenz, daß ihr Quadrat den ersten Platz von der Linken zur Rechten, und die einfache Größe mit dem Exponenten 1 den zweiten erhält, während jenes Glied, in welchem diese nicht mehr vorkömmt, an die dritte Stelle gesetzt wird;

2) Nach der im III. Theile §. 78. I. Zusatz aufgestellten Regel ziehe man aus dem ersten Gliede die Quadratwurzel aus, und schreibe diese rechts neben das Quadrat an den gezogenen Vertikalstrich, oder nach dem Aequalzeichen hin;

3) Man erhebe nach dem so eben zitirten §. den ersten Theil der Wurzel zum Quadrate, und subtrahire dieses vom ersten Gliede des gegebenen Quadrates;

4) Man nehme den gefundenen Wurzeltheil doppelt, dividire damit das erste Glied des Restes, und setze den Quotienten als den zweiten Wurzeltheil neben den ersten, und zugleich rechts neben den Divisor mit seinem Zeichen hin;

5) Jetzt multiplizire man mit dem zweiten Wurzeltheile den Divisor sammt dem beigesetzten Quotienten, und ziehe das Produkt, welches das zweifache Produkt des ersten Theiles in den zweiten, und das Quadrat des zweiten Theiles enthält, vom oben stehenden Dividend ab;

6) Wenn kein Rest mehr bleibt, so ist die ganze Arbeit vollendet, und die gefundene Wurzel ist zweigliederigt; bleibt aber ein Rest, so nehme

man von den beiden gefundenen Wurzeltheilen, die man wie ein Glied betrachtet, das Doppelte, und dividire damit die jetzt noch übrigen Glieder des Quadrates, dann schreibe man den Quotienten als den dritten Wurzeltheil neben die beiden ersten Theile der Wurzel, und neben den Divisor mit seinem Zeichen hin, und multiplizire den Divisor sammt dem beigesetzten dritten Wurzeltheile mit dem Quotienten, man erhält das zweifache Produkt des ersten und zweiten Theiles in den dritten, und das Quadrat des dritten Theiles zum Produkte, welches vom Dividend abgezogen wird;

7) Dieses Verfahren setze man auf eine ähnliche Weise so lange fort, bis zuletzt kein Rest mehr bleibt, oder bis man, im Falle die mehrtheilige Größe ein unvollkommenes Quadrat ist, durch Annäherung der wahren Wurzel so nahe gekommen ist, als es die vorliegende Aufgabe erfodert.

I. Beispiel:

Es soll aus $2ab + b^2 + a^2$ die Quadratwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

1) Man ordne das Quadrat nach einer Potenz, etwa nach der von der Größe a, und ziehe rechts einen Vertikalstrich, oder mache das Aequalzeichen:

$\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)} =$, oder kürzer $a^2 + 2ab + b^2 \{$

2) Man ziehe aus dem ersten Gliede die Quadratwurzel aus, schreibe diese rechts, und ziehe ihr Quadrat vom ersten Gliede ab:

$$\begin{array}{l|l} a^2 + 2ab + b^2 & a \\ a^2 & \\ \hline - & \\ \hline - & \end{array}$$

3) Den Rest dividire man mit 2a, und schreibe den

Quotienten neben den ersten Wurzeltheil a und neben den Divisor hin:

$$a^2 + 2ab + b^2 \;\big\{\; a + b$$
$$a^2$$
$$-$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$+ 2ab + b^2$$
$$2a \quad + b$$

4) Man multiplizire $2a + b$ mit b, und subtrahire das Produkt vom Dividend, es bleibt dann nichts mehr übrig:

$$a^2 + 2ab + b^2 \;\big\{\; a + b$$
$$a^2$$
$$-$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$2ab + b^2$$
$$2a \;\; + b$$
$$2ab + b^2$$
$$- \quad -$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$-$$

Daher ist $\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)} = a + b.$

II. Beispiel:

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{4} a^2 - ae + e^2 + 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}\right)}$$
$$\tfrac{1}{4} a^2 \qquad\qquad = \tfrac{1}{2} a - e + \frac{2ex}{a}$$
$$-$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$- ae + e^2 + 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$$
$$a - e$$
$$- ae + e^2$$
$$+ \quad -$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$$
$$a \quad - \quad 2e \quad + \frac{2ex}{a}$$
$$2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$$
$$- \quad + \quad -$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$-$$

Daher ist $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - ae + e^2 + 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2})}$
$= \frac{1}{2}a - e + \frac{2ex}{a}$.

§. 3.

Lehrsatz:

Wird eine gegebene ganze Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von zwei Ziffern getheilt, von welchen die links stehende auch ein Ziffer haben darf, so enthält die Quadratwurzel so viele Ziffern, als man Klassen bekömmt.

Beweis:

a) Die Anzahl der Ziffern, woraus die Quadratzahl besteht, ist nie größer, als die doppelte Anzahl der Ziffern der Wurzel, und

b) dieselbe ist auch nie kleiner, als die doppelte Anzahl dieser Ziffern weniger Eins.

Also hat die Quadratwurzel so viele Ziffern, als man Klassen bekömmt, wenn man von der Rechten zur Linken die Quadratzahl klassifizirt, und jeder Klasse zwei Ziffern gibt, mit Ausnahme der letzten links stehenden Klasse, die bei einer ungeraden Anzahl von Ziffern nur ein Ziffer erhält.

Beweis von a: 1) Wenn man der Zahl 1 rechts so viele Nullen anhängt, als die andere Zahl Ziffern hat, so ist die erstere Zahl allemal größer, weil sie eine Einheit der nächst höheren Ordnung ausdrückt (I. §. 14.), d. h.,

$10 > 9$
$100 > 97$
$1000 > 989$, und allgemein
$10^n > (9783 \ldots n)$

Wird nämlich 10 zur n^{ten} Würde erhoben, so erhält man zum Produkte 1 mit n beigefügten Nullen (III. §. 69. Zus. V.), während die andere Zahl

9783 . . . . nur n Ziffern, somit um eine Stelle weniger hat.

2) Die größere Zahl gibt die größere Potenz von einerlei Grade (III. §. 70. II. Grundſ.), daher iſt

$$100 > 9^2$$
$$10000 > 97^2$$
$$1000000 > 989^2, \text{ und}$$
$$10^{2n} > (9783 \ldots\ldots n)^2;$$

3) Nun iſt 100 die kleinſte Zahl von 3 Ziffern, und größer als 9^2, alſo kann 9^2, oder überhaupt das Quadrat einer Ziffer höchſtens nur aus zwei Ziffern beſtehen, ſonſt wäre $9^2 =$ oder > 100.

Eben ſo iſt 10000 die kleinſte Zahl von 5 Ziffern, und größer als 97^2, daher kann 97^2, oder jedes Quadrat zweier Ziffern höchſtens nur vier Ziffern haben.

Ferner 1000000 iſt die kleinſte Zahl von ſieben Ziffern ꝛc., mithin enthält 989^2, oder überhaupt das Quadrat einer Zahl von drei Ziffern höchſtens nur ſechs Ziffern.

Endlich das Quadrat 10^{2n} (III. §. 78. Lehrſ.) iſt die kleinſte Zahl mit 2n † 1 Ziffern, und doch noch größer als das Quadrat $(9783\ldots n)^2$, daher kann dieſes letztere Quadrat nie mehr als 2n Ziffern enthalten, ſonſt müßte es gleich oder größer, als 10^{2n} ſein, was hier unmöglich iſt, weil $(9783\ldots n)^2 < 10^{2n}$.

Es iſt alſo die Anzahl der Ziffern, woraus die Quadratzahl beſteht, nie größer, als die doppelte Anzahl der Ziffern der Wurzel.

Beweis von b: 1) Unter Zahlen, die gleich viele Ziffern haben, iſt immer jene die kleinſte, bei welcher nur 1 mit beigefügten Nullen vorkömmt, d. h.,

$$1 < 6$$
$$10 < 92$$
$$100 < 893$$
$$1000 < 9785, \text{ und überhaupt}$$
$$10^{n-1} < (8974 \ldots n);$$

2) Die kleinere Zahl gibt immerhin das kleinere Quadrat, daher iſt

$$1 < 6^2$$
$$100 < 92^2$$
$$10000 < 893^2$$
$$1000000 < 9785^2 \text{, und}$$
$$10^{2n-2} < (8974\ldots n)^2;$$

3) Da nun 1 die kleinste Zahl mit einem Ziffer und $< 6^2$, 100 die kleinste mit drei Ziffern und $< 92^2$, 10000 die kleinste mit fünf Ziffern und $< 893^2$, und 1000000 die kleinste mit sieben Ziffern und $< 9785^2$ ist, so kann 6^2 nicht weniger als 1, 92^2 nicht weniger als 3, 893^2 nicht weniger als 5, und 9785^2 nicht weniger als 7 Ziffern haben, mithin geben die Zahlen mit einem, zwei, drei oder vier Ziffern im Quadrate nie weniger Ziffern, als das um Eins verminderte Duplum;

4) Ueberhaupt hat das Quadrat 10^{2n-2} so viele Nullen, als im Exponenten Einheiten vorkommen, somit $2n - 1$ Ziffern, und ist noch kleiner, als $(8974\ldots n)^2$, daher kann dieses letztere Quadrat nie weniger, als $2n - 1$ Ziffern haben, weil es sonst nicht größer wäre, als 10^{2n-2}.

Es ist also die Anzahl der Ziffern, woraus die Quadratzahl besteht, nie kleiner, als die doppelte Anzahl dieser Ziffern weniger Eins.

Ist z. B. die Zahl 9875934 gegeben, so hat man eine Zahl von 4 Klassen, nämlich 9|87|59|34; um deswillen bekömmt die Wurzel vier Ziffern.

§. 4.

Lehrsatz:

Theilet man eine gegebene ganze Zahl von drei oder vier Ziffern auf die vorhin angezeigte Weise in Klassen, so kömmt das letzte Ziffer vom Quadrate des ersten Theiles der herauszuziehenden Wurzel in Betreff des Lokalwerthes unter das letzte Ziffer der ersten Klasse, das letzte Ziffer vom doppelten Produkte des ersten Theiles in

den zweiten unter das erste Ziffer der zweiten Klasse, und das letzte Ziffer vom Quadrate des zweiten Theiles unter das letzte Ziffer der zweiten Klasse zu stehen.

I. Beweis:

1) Es sei die Zahl 3481 gegeben; diese hat zwei Klassen, von denen die Ziffern 34 die erste, und 81 die zweite Klasse bilden, weil hier alles von der linken zur rechten Seite gezählt wird;

2) Nach §. 3. hat bei einer Zahl von zwei Klassen die Wurzel ebenfalls zwei Ziffern, die man allgemein mit a und b ausdrücken kann;

3) Die Wurzel zum Quadrate erhoben muß das gegebene Quadrat wieder geben, daher ist $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 34|81$;

4) Der erste Wurzeltheil a steht an der Stelle der Zehner, und a^2 bezeichnet Hunderte; wenn man also die zwei Nullen wegläßt, so kömmt bei einer vorzunehmenden Subtraktion wegen des Lokalwerthes das letzte Ziffer von a^2 unter das an der Stelle der Hunderte stehende Ziffer 4, somit unter das letzte Ziffer der ersten Klasse zu stehen;

5) Wenn man a mit b, somit Zehner mit Einern multiplizirt, so erhält man zum Produkte Zehner, d. h., eine Zahl, die am Ende eine Null hat; läßt man nun diese beim Anschreiben weg, so kömmt das letzte Ziffer von 2ab unter das an der Stelle der Zehner stehende Ziffer 8, somit unter das erste Ziffer der zweiten Klasse zu stehen;

6) Wird b zum Quadrate erhoben, so erhält man immer eine solche Zahl, bei welcher das letzte Ziffer Einer bezeichnet; also kömmt das letzte Ziffer von b^2 unter das an der Stelle der Einer stehende Ziffer 1, somit unter das letzte Ziffer der zweiten Klasse zu stehen.

II. Beweis:

1) Weil die gegebene Quadratzahl zwei Klassen hat, so hat die Wurzel zwei Ziffern, von denen das erste Zehner und das andere Einer bezeichnet;

2) Drückt man den natürlichen Werth des an der

Stelle der Zehner stehenden Ziffers mit f, und den des andern mit g aus, während beim ersteren der Lokalwerth durch den beigesetzten Faktor 10 bezeichnet wird, so erhält man allgemein zur Wurzel die zweigliederigte Größe $f \cdot 10 + g$;

3) Erhebt man $f \cdot 10 + g$ zum Quadrate, so findet man, daß $(f \cdot 10 + g)^2 = f^2 \cdot 100 + 2fg \cdot 10 + g^2$;

4) Hier bezeichnet das letzte Ziffer von f^2 Hunderte, das von $2fg$ Zehner, und das letzte Ziffer von g^2 Einer, also muß das letzte Ziffer vom Quadrate des ersten Theiles ꝛc.

I. Zusatz: Besteht die gegebene Quadratzahl aus drei Klassen, und hat sie somit 5 oder 6 Ziffern, so bekömmt die Wurzel drei Ziffern, und sie kann allgemein durch $a + b + c$ ausgedrückt werden; das Quadrat davon ist $= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$.

Hier hat a den Lokalwerth von Hunderten, also b den von Zehnern, und c bedeutet Einer; daher erhält man durch a^2 Zehentausende, durch $2ab$ Tausende, durch b^2 Hunderte, und das letzte Ziffer von a^2 kömmt unter das letzte Ziffer der ersten Klasse, das letzte Ziffer von $2ab$ unter das erste Ziffer der zweiten Klasse, und das letzte Ziffer von b^2 unter das letzte Ziffer dieser Klasse zu stehen.

Addirt man Hunderte und Zehner, so erhält man eine Summe von Zehnern, d. h., eine Zahl, die am Ende eine Null hat; läßt man diese wieder weg, so kömmt das letzte Ziffer vom zweifachen Produkte des ersten und zweiten Theiles in den dritten, oder von $2(a + b)c$ unter das erste Ziffer der dritten Klasse, und das letzte Ziffer vom Quadrate des dritten Theiles, oder von c^2 unter das letzte Ziffer der dritten Klasse zu stehen.

Ist z. B. die Zahl 654321 gegeben, so hat man drei Klassen, nämlich 65|43|21, und 5 bezeichnet Zehentausende, 4 bezeichnet Tausende, 3 bezeichnet Hunderte, 2 bezeichnet Zehner, und 1 bezeichnet Einer; daher kömmt das letzte Ziffer vom Quadrate des ersten Theiles ꝛc.

Setzt man $a = f \cdot 100$, dann $b = g \cdot 10$,

und $c = h$, so ist $a + b + c = f \cdot 100 + g \cdot 10 + h$, und $(a + b + c)^2 = (f \cdot 100 + g \cdot 10 + h)^2 = f^2 \cdot 10000 + 2fg \cdot 1000 + g^2 \cdot 100 + 2(f \cdot 10 + g) h \cdot 10 + h^2$; woraus man wieder offenbar ersieht, daß das letzte Ziffer vom Quadrate des ersten Theiles ꝛc.

II. Zusatz: Besteht eine Zahl aus wie immer vielen Ziffern, so kömmt wieder das letzte Ziffer vom Quadrate des ersten Theiles unter das letzte Ziffer der ersten Klasse, das letzte Ziffer vom doppelten Produkte des ersten Theiles in den zweiten unter das erste Ziffer der zweiten Klasse, und das letzte Ziffer vom Quadrate des zweiten Theiles unter das letzte Ziffer der zweiten Klasse zu stehen; nimmt man nun allemal die vorausgehenden Theile als einen Theil an, so kömmt immerhin das letzte Ziffer vom zweifachen Produkte aller vorausgehenden Theile in den folgenden unter das erste, und das letzte Ziffer vom Quadrate des folgenden Theiles unter das letzte Ziffer der nächsten Klasse zu stehen.

Wenn die gegebene Zahl $m + 1$ Klassen enthält, so besteht die Quadratwurzel aus eben so vielen Ziffern; man bezeichne das erste Ziffer mit f, das folgende mit g, aber ohne ihren Lokalwerth auszudrücken, so ist $a = f \cdot 10^{m}$, und $b = g \cdot 10^{m-1}$, folglich $a^2 = f^2 \cdot 10^{2m}$, dann $2ab = 2fg \cdot 10^{2m-1}$, und $b^2 = g^2 \cdot 10^{2m-2}$, d. h., das letzte Ziffer des Quadrates des ersten Theiles der Wurzel ist von der Ordnung $2m$, und hat, weil noch m Klassen oder $2m$ Ziffern folgen, mit dem letzten Ziffer der ersten Klasse gleichen Lokalwerth, dann das letzte Ziffer vom doppelten Produkte des ersten Theiles in den zweiten ist von der Ordnung $2m - 1$, und hat mit dem ersten Ziffer der zweiten Klasse den nämlichen Lokalwerth, endlich das letzte Ziffer vom Quadrate des zweiten Theiles ist von der Ordnung $2m - 2$, und hat mit dem letzten Ziffer der zweiten Klasse gleichen Lokalwerth.

Nimmt man nun überhaupt die gefundenen Wurzeltheile zusammen als einen an, so hat jederzeit das

letzte Ziffer vom doppelten Produkte aller schon gefundenen Theile in den folgenden mit dem ersten Ziffer, und das letzte Ziffer vom Quadrate dieses Theiles mit dem letzten Ziffer der folgenden Klasse gleichen Lokalwerth.

Man drücke nun allemal die schon gefundenen Wurzeltheile mit a, den folgenden Theil mit b, und die Anzahl der noch folgenden Klassen mit n aus, und setze, weil in der Wurzel nach a noch n, und nach b noch $n - 1$ Ziffern folgen, $a = p \,.\, 10^{n}$, und $b = q \,.\, 10^{n-1}$, so ist $a^2 = p^2 \,.\, 10^{2n}$, dann $2ab = 2pq \,.\, 10^{2n-1}$, und $b^2 = q^2 \,.\, 10^{2n-2}$, und man ersieht daraus die Richtigkeit und allgemeine Giltigkeit des hier in Betreff des Lokalwerthes der Ziffern aufgestellten Gesetzes.

§. 5.

Beweis für die Richtigkeit der bei der Ausziehung der Quadratwurzeln in Zahlziffern vorkommenden Regeln.

Im III. Theile des Lehrbuches §. 29. sind für die Ausziehung der Quadratwurzeln in Zahlen die Regeln aufgestellt worden, derer Richtigkeit und allgemeine Giltigkeit aus den bisher aufgestellten Lehrsätzen auf folgende Weise bewiesen wird:

1) Theilet man die Zahl zu zwei Ziffern in Klassen, so bekömmt man in der Wurzel so viele Ziffern, als Klassen vorhanden sind (§. 3.);

2) Alle Zahlen kann man, da sie eine Summe von Einern, Zehnern, Hunderten, Tausenden ꝛc. sind (III. §. 64.), als mehrgliederigte Größen betrachten, und somit das erste Ziffer der Wurzel nach seinem natürlichen und seinem Lokalwerthe von der Linken zur Rechten mit a, das zweite mit b, das dritte mit c ꝛc., und die ganze Wurzel mit $a + b + c + \ldots$ ausdrücken;

3) Weil $(a + b + c + \ldots)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + \ldots$, und das letzte Ziffer von a^2 mit dem letzten Ziffer der ersten Klasse gleichen Lo-

kalwerth hat (§. 4.), so ist das Quadrat des ersten Wurzeltheiles in der ersten Klasse enthalten; man muß also, um diesen zu finden, aus der ersten Klasse nach der im III. Theile des Lehrbuches §. 26. angeführten Tabelle die Quadratwurzel ausziehen, und auf eine ähnliche Weise, wie bei der Division mit ganzen Zahlen (I. §. 68.), das Quadrat des ersten Theiles von der ersten Klasse abziehen, indem man bei der Subtraktion das letzte Ziffer desselben unter das letzte Ziffer der ersten Klasse schreibt (§. 4.);

4) In der Wurzel folgen von der Linken zur Rechten jedesmal so viele Ziffern, als viel Klassen noch übrig sind; um deswillen darf man zur Bezeichnung des den Ziffern zukommenden Lokalwerthes die Nullen nicht anschreiben, ausser in jenen Fällen, wo die Wurzeltheile bloße Nullen sind (III. §. 29. Nro. 8.);

5) Das Quadrat besteht nebst dem Quadrate der vorausgehenden Theile immer aus dem doppelten Produkte dieser Theile in den folgenden, und aus dem Quadrate des folgenden Theiles (§. 1. Zus. II.); daher dividire man immerhin, um den folgenden Wurzeltheil zu finden, mit dem Duplum der schon gefundenen Wurzeltheile, und schreibe bei der Division das letzte Ziffer des Divisors unter das erste Ziffer der nächsten Klasse (§. 4. Zus. II.);

6) Man muß den neuen Wurzeltheil allemal auch neben den Divisor rechts hinschreiben, damit man immer bei der Multiplikation das doppelte Produkt der vorausgehenden Theile in den folgenden, und das Quadrat des folgenden Theiles erhält (§. 1. Zus. II.);

7) Endlich muß man aus dem in §. 4. Zus. II. angeführten Grunde jederzeit das letzte Ziffer vom doppelten Produkte aller vorhergehenden Theile in den folgenden unter das erste Ziffer, und das letzte Ziffer vom Quadrate des folgenden Theiles unter das letzte Ziffer der nächsten Klasse schreiben.

Um die Sache verständlicher zu machen, führe ich zwei Beispiele an, die nach den hier aufgestellten Formeln aufgelös't sind.

I. Beispiel:

Es soll aus 3481 die Quadratwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

$$
\begin{array}{r}
34|81 \,\}\, 59 = a + b \\
a^2 = 25 \quad \\
\hline
981 \\
(2a + b) = 109 \\
2ab + b^2 = 981 \\
\hline
\end{array}
$$

Mithin ist $\sqrt{3481} = 59$.

II. Beispiel:

Es soll aus 119716 die Quadratwurzel ausgezogen werden (III. §. 29. Beisp. 1.).

Auflösung:

$$
\begin{array}{r}
11|97|16 \,\{\, 346 = a + b + c \\
a^2 = 9 \quad \\
\hline
297 \\
(2a + b) = 64 \\
2ab + b^2 = 256 \\
\hline
4116 \\
2(a + b) + c = 686 \\
2(a + b)c + c^2 = 4116 \\
\hline
\end{array}
$$

Daher ist $\sqrt{119716} = 346$.

§. 6.

Lehrsatz:

Erhebt man die in ganzen Zahlen gefundene Quadratwurzel zum Quadrate, und zählet man den Rest, im Falle zuletzt einer geblieben ist, dazu, so erhält man das gegebene Quadrat wieder.

Beweis:

1) Nach den bei der Ausziehung der Quadratwurzeln aufgestellten Regeln werden nach und nach alle Theile des Quadrates der Wurzel vom gegebenen Quadrate abgezogen; bezeichnet man daher das Quadrat der in ganzen Zahlen gefundenen Wurzel mit n^2, und den Rest mit R, so ist $A - n^2 = R$;

2) Transponirt man n^2, um den Werth von A auszudrücken, so ist $A = n^2 + R$ (III. §. 96. Zus. I.), d. h., das gegebene Quadrat ist gleich der Summe aus dem Quadrate der Wurzel, und dem zuletzt gebliebenen Reste.

I. Zusatz: Die gefundene Wurzel ist zu groß, wenn ihr Quadrat größer ist, als die gegebene Quadratzahl.

II. Zusatz: Bei der Ausziehung der Quadratwurzel muß der Rest allemal kleiner sein, als das um 1 vermehrte Duplum der in ganzen Zahlen gefundenen Wurzel, d. h., R muß kleiner sein, als $2n + 1$.

Man nehme an, R sei $= 2n + 1$, so ist $A = n^2 + 2n + 1$, weil $A = n^2 + R$, und auf diese Weise Gleiches anstatt des Gleichen gesetzt wird (I. §. 10. Nro. 10.); ferner bei gleichen Zahlen sind die Quadratwurzeln gleich (III. §. 70.), daher ist $\sqrt{A} = \sqrt{(n^2 + 2n + 1)} = n + 1$, d. h., die gefundene Wurzel n ist jetzt um 1 zu klein.

Man setze $R > 2n + 1$, so ist $A > n^2 + 2n + 1$, weil $A = n^2 + R$, und auf diese Weise die größere Zahl R weggelassen, und dagegen die kleinere $2n + 1$ hingesetzt wird; überdieß gibt die größere Zahl die größere Quadratwurzel, also ist $\sqrt{A} > \sqrt{(n^2 + 2n + 1)}$, oder $\sqrt{A} > n + 1$, d. h., die gefundene Quadratwurzel n ist wieder zu klein, weil die wahre Wurzel größer ist, als die um 1 vermehrte Wurzel n.

Da nun der Rest weder gleich $2n + 1$, noch größer, als $2n + 1$ sein darf, so muß er allemal kleiner sein, als diese Summe (III. §. 30. Zus. II.), oder $R < 2n + 1$.

III. Zusatz: Wenn beim Ausziehen der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl A am Ende ein Rest bleibt, so ist die Quadratwurzel von A eine Irrationalzahl (III. §. 72. Zus. IV.).

§. 7.

Beweis für die Richtigkeit jener Regeln, nach welchen die Quadratwurzel einer gegebenen ganzen Zahl durch Annäherung gefunden wird.

Im III. Theile des Lehrbuches §. 30. sind die Regeln aufgestellt worden, nach welchen bei unvollkommenen Quadraten in ganzen Zahlen die Quadratwurzeln gefunden werden; worüber ich jetzt folgende Beweisgründe anführe:

1) Es werde die gegebene Quadratzahl allgemein durch A, die Anzahl der Paare von beigefügten Nullen durch n, und somit die Anzahl der beigesetzten Nullen durch 2n ausgedrückt;

2) Durch die Hinzusetzung der Nullen ist die gegebene Quadratzahl A in eine andere, nämlich in $A \,.\, 10^{2n}$ verändert worden;

3) Damit man die verlangte wahre Wurzel von A findet, muß man die Zahl $A \,.\, 10^{2n}$ auch mit 10^{2n} dividiren (I. §. 63. Zus. II.), indem $A = \frac{A \,.\, 10^{2n}}{10^{2n}}$, und somit nach dem im III. Th. §. 70. aufgestellten ersten Grundsatze $\sqrt{A} = \sqrt{\left(\frac{A \,.\, 10^{2n}}{10^{2n}}\right)}$;

4) Aus einem Bruche wird die Wurzel ausgezogen, wenn man sie aus dem Zähler und Nenner auszieht (III. §. 72. Zus. I.); die Wurzel von $A \,.\, 10^{2n}$,

oder $\sqrt{A \cdot 10^{2n}}$ besteht aus den bei der wirklichen Ausziehung gefundenen Zahlziffern, und die Quadratwurzel von 10^{2n}, oder $\sqrt{10^{2n}}$ ist $= 10^{n}$ nach III. §. 78. Zus. I.;

5) Erhebt man 10 zur n^{ten} Würde, so erhält man 1 mit n angehängten Nullen zum Produkte (III. §. 69. Zus. V.); man muß also die gefundenen Zahlziffern mit 1 und n angehängten Nullen, oder mit 10^{n} dividiren, d. h., in der Wurzel sind von der Rechten zur Linken so viele Dezimalen abzuschneiden, als viel Paare von Nullen beigesetzt worden sind.

Aus diesen Gründen hat man im III. Theile im I. Beispiele des §. 30. aus der Zahl 3 die Quadratwurzel durch Annäherung bis auf 7 Dezimalstellen bestimmt, indem man sieben Paare von Nullen beisetzte, und deshalb von der Rechten zur Linken 7 Dezimalen abschnitt; denn

$$3 \text{ ist} = \frac{3 \cdot 100000000000000}{100000000000000} = \frac{300000000000000}{100000000000000},$$

und daher ist $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{300000000000000}}{\sqrt{100000000000000}} = \frac{17320508}{10000000}$

$$= 1\frac{7320508}{10000000} = 1{,}7320508 \ldots.$$

Anmerkung: Die Dezimalbrüche lassen sich in gemeine Brüche verwandeln, und aus einem Bruche überhaupt wird eine Wurzel dadurch ausgezogen, daß man sie aus dem Zähler und Nenner auszieht; überdieß bleibt der Werth des Bruches unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl multiplizirt oder dividirt (III. §. 66. d.), deswegen bedarf es in Absicht auf die im III. Theil §. 31. und §. 32. für die Ausziehung der Quadratwurzeln aus Dezimal- und gemeinen Brüchen aufgestellten Regeln keines eigenen Beweises.

II. Abschnitt.

Vom Kubus und der Kubikwurzel mehrtheiliger Größen.

§. 8.

Das allgemeine Kubirungs-Gesetz.

Lehrsatz: Der Kubus einer jeden zweitheiligen Größe besteht aus dem Kubus des ersten Theiles, dem dreifachen Produkte vom Quadrate des ersten Theiles in den zweiten, dem dreifachen Produkte vom Quadrate des zweiten Theiles in den ersten, und aus dem Kubus des zweiten Theiles; d. h., $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, und $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Beweis:

1) Eine Größe wird zum Kubus erhoben, wenn man sie dreimal als Faktor setzet, oder wenn man ihr Quadrat mit der nämlichen Größe multiplizirt (III. §. 25. f.), daher ist $(a + b)^3 = (a + b)\,(a + b)\,(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)\,(a + b)$, und $(a - b)^3 = (a - b)\,(a - b)\,(a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)\,(a - b)$;

2) Multiplizirt man wirklich $a^2 + 2ab + b^2$ mit $a + b$, und $a^2 - 2ab + b^2$ mit $a - b$, so erhält man im ersten Falle $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, und im zweiten $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ zum Produkte, wie aus Nachstehendem ersichtlich ist:

I.
$$\begin{array}{lllll}
a^2 & + 2ab & + b^2 & & \\
a & + b & & & \\
\hline
a^3 & + 2a^2b & + ab^2 & & \\
 & \quad a^2b & + 2ab^2 & + b^3 & \\
\hline
a^3 & + 3a^2b & + 3ab^2 & + b^3, & \text{und}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{II.} & a^2 - 2ab + b^2 \\ & a - b \\ \hline & a^3 - 2a^2b + ab^2 \\ & \quad - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ \hline & a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \end{array}$$

3) Diese beiden Produkte sind ganz dem aufgestellten Gesetze gemäß, indem $a^3 = (a)^3$, $3a^2b = 3\,(a^2 \times b)$, $3ab^2 = 3\,(a \times b^2)$, und $b^3 = (b)^3$, ferner $a^3 = (a)^3$, $-3a^2b = 3\,(a^2 \times - b)$, $3ab^2 = 3\,(a \times b^2)$, und $-b^3 = (-b)^3$;

4) Die beiden Ausdrücke $a + b$ und $a - b$ bezeichnen jede zweitheilige Größe.

Um deswillen besteht der Kubus einer zweigliederigten Größe aus dem Kubus des ersten Theiles, dem dreifachen Produkte aus dem Quadrate des ersten Theiles in den zweiten, dem dreifachen Produkte des ersten Theiles in das Quadrat des zweiten, und aus dem Kubus des zweiten Theiles; daher ist z. B. $5^3 = (3 + 2)^3 = 27 + 54 + 36 + 8 = 125$.

I. Zusatz: Der Kubus einer dreitheiligen Größe besteht aus dem Kubus des ersten Theiles, dem dreifachen Quadrate des ersten Theiles in den zweiten, dem dreifachen Quadrate des zweiten Theiles in den ersten, und dem Kubus des zweiten Theiles, wie auch aus dem dreifachen Produkte des Quadrates des ersten und zweiten Theiles in den dritten, dem dreifachen Produkte des Quadrates des dritten Theiles in den ersten und zweiten, und aus dem Kubus des dritten Theiles; d. h., $(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3\,(a + b)^2\,c + 3\,(a + b)\,c^2 + c^3$.

Zur Beweiseführung setze man die Summe der beiden ersten Theile, oder $a + b = m$, und kubire die zweitheilige Größe $m + c$ nach dem Lehrsatze, man erhält $m^3 + 3m^2c + 3mc^2 + c^3$; dann setze man anstatt m den gleichen Ausdruck $a + b$, und $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ anstatt m^3; man bekömmt dadurch den verlangten Kubus, nämlich $(a + b + c)^3 = (m + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3\,(a + b)^2\,c + 3\,(a + b)\,c^2 + c^3$.

II. Zusatz: Da man immer alle vorausgehenden Glieder einer mehrtheiligen Größe als den ersten, und den folgenden Theil derselben als den letzten Theil einer zweigliederigten Größe betrachten kann, so bestehet der Kubus einer jeden mehrtheiligen Größe aus dem Kubus des ersten Theiles, dem dreifachen Quadrate des ersten Theiles in den zweiten, dem dreifachen Quadrate des zweiten Theiles in den ersten, und dem Kubus des zweiten Theiles; nimmt man nun allemal die vorausgehenden Theile als einen Theil an, so besteht ferner der Kubus aus dem dreifachen Quadrate aller vorausgehenden Theile in jeden folgenden, dem dreifachen Quadrate jedes folgenden Theiles in die Summe der vorausgehenden, und aus dem Kubus jedes folgenden Theiles; z. B. $(a + b + c + d)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 + 3(a + b + c)^2d + 3(a + b + c)d^2 + d^3$.

Setzet man $a + b + c = m$, so ist $(a + b + c + d)^3 = (m + d)^3 = m^3 + 3m^2d + 3md^2 + d^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 + 3(a + b + c)^2d + 3(a + b + c)d^2 + d^3$.

III. Zusatz: Wenn man aus einer mehrtheiligen Größe die Kubikwurzel ausziehen soll (III. §. 25. h.), so muß sie unter diesen Formeln enthalten sein, d. h., in ihr müssen alle Theile derselben vorkommen; findet dieses statt, so hat man einen vollkommenen Kubus, im Gegentheile aber einen unvollkommenen Kubus.

§. 9.

Die Regeln für die Ausziehung der Kubikwurzel bei vieltheiligen Größen in der Buchstabenrechnung.

Aus einer mehrtheiligen Größe wird die Kubikwurzel ausgezogen, wenn man jene Größe findet, die dreimal als Faktor gesetzt den gegebenen Kubus wieder gibt; daher ergeben sich aus dem im vorigen §. aufgestellten allgemeinen Kubirungsgesetze folgende Re-

geln für die Ausziehung der Kubikwurzel in der Buchstabenrechnung:

1) Man ordne die Theile so nach einer Größe, daß ihr Kubus am ersten, das Quadrat am zweiten, die einfache Potenz am dritten, und jene Theile, wo diese Größe nicht mehr vorkömmt, am vierten Platze zu stehen kommen;

2) Nach der im III. Theile §. 78. I. Zus. aufgestellten Regel ziehe man aus dem an der ersten Stelle stehenden Gliede die Kubikwurzel aus, und schreibe diese rechts neben den Kubus an den gezogenen Vertikalstrich oder an das Aequalzeichen hin;

3) Man erhebe nach dem so eben zitirten §. den ersten Theil der Wurzel zum Kubus, und subtrahire diesen vom ersten Gliede des gegebenen Kubus;

4) Man nehme das dreifache Quadrat des ersten Wurzeltheiles, dividire damit das erste Glied des Restes, und setze den Quotienten als den zweiten Wurzeltheil neben den ersten hin;

5) Mit diesem Quotienten multiplizire man das dreifache Quadrat des ersten Theiles, um das dreifache Quadrat des ersten Theiles in den zweiten zu erhalten, ferner nehme man das dreifache Quadrat des zweiten Theiles in den ersten, und den Kubus des zweiten Theiles, und subtrahire die Summe dieser Produkte vom obigen Reste, hebt sich nun alles auf, so besteht die gesuchte Kubikwurzel nur aus den gefundenen zwei Wurzeltheilen;

6) Bleibt aber ein Rest, so nehme man die beiden gefundenen Theile für einen, und wiederhole das Verfahren von Nro. 4 und 5 so lange, bis alle Theile der Wurzel gefunden sind;

7) Sollte die gegebene Größe kein vollkommener Kubus sein, so setze man das hier angezeigte Verfahren so lange fort, bis man auf dem Wege der Annäherung die Wurzel so genau gefunden hat, als es die vorliegende Aufgabe erfodert.

I. Beispiel:

Es sei aus $3ab^2 + 3a^2b + a^3 + b^3$ die Kubikwurzel auszuziehen.

Auflösung:

1) Man ordne den Kubus nach einer Potenz, etwa nach der von der Größe a, und mache rechts ein Aequalzeichen, oder ziehe einen Vertikalstrich:

$$\sqrt[3]{(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)} =, \text{ oder } a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \{$$

2) Man ziehe aus dem ersten Gliede die Kubikwurzel aus, schreibe sie rechts, und ziehe ihren Kubus vom ersten Gliede ab:

$$\begin{array}{l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \{ \; a \\ a^3 \\ - \\ \hline - \end{array}$$

3) Den Rest dividire man mit $3a^2$, und schreibe den Quotienten als den zweiten Wurzeltheil neben den ersten hin:

$$\begin{array}{l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \{ \; a + b \\ a^3 \\ - \\ \hline + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ 3a^2 \end{array}$$

4) Man multiplizire $3a^2$ mit b, setze überdieß das dreifache Quadrat des zweiten Theiles in den ersten, und den Kubus des zweiten Theiles, und subtrahire dann diese Produkte vom Reste, es bleibt nichts mehr übrig:

$$a^3 \dagger 3a^2b \dagger 3ab^2 \dagger b^3 \Big\{ a \dagger b$$
$$a^3$$
$$-$$
$$\dagger 3a^2b \dagger 3ab^2 \dagger b^3$$
$$3a^2$$
$$3a^2b \dagger 3ab^2 \dagger b^3$$
$$- \quad - \quad -$$

Folglich ist $\sqrt[3]{(a^3 \dagger 3a^2b \dagger 3ab^2 \dagger b^3)} = a \dagger b$.

II. Beispiel:

Es soll aus $8x^6 \dagger 12x^5 - 30x^4 - 35x^3 \dagger 45x^2 \dagger 27x - 27$ die Kubikwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

$$8x^6 \dagger 12x^5 - 30x^4 - 35x^3 \dagger 45x^2 \dagger 27x - 27 \Big\{ 2x^2 \dagger x - 3$$
$$8x^6$$
$$-$$
$$12x^5 - 30x^4 - 35x^3 \dagger 45x^2 \dagger 27x - 27$$
$$12x^4$$
$$12x^5 \dagger 6x^4 \dagger x^3$$
$$- \quad - \quad -$$
$$-36x^4 - 36x^3 \dagger 45x^2 \dagger 27x - 27$$
$$12x^4 \dagger 12x^3 \dagger 3x^2$$
$$-36x^4 - 36x^3 - 9x^2 \dagger 54x^2 \dagger 27x - 27$$
$$\dagger \quad \dagger \quad \dagger \quad - \quad - \quad \dagger$$

Mithin ist $\sqrt[3]{(8x^6 \dagger 12x^5 - 30x^4 - 35x^3 \dagger 45x^2 \dagger 27x - 27)} = 2x^2 \dagger x - 3$.

§. 10.

Lehrsatz:

Wird eine gegebene ganze Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von drei Ziffern getheilt, von welchen die links

stehende auch ein oder zwei Ziffern haben darf, so enthält die Kubikwurzel so viele Ziffern, als man Klassen bekömmt.

Beweis:

a) Die Anzahl der Ziffern, woraus die Kubikzahl besteht, ist nie größer, als die dreifache Anzahl der Ziffern der Wurzel, und

b) dieselbe ist nie kleiner, als die dreifache Anzahl dieser Ziffern weniger zwei.

Also hat die Kubikwurzel so viele Ziffern, als man Klassen bekömmt, wenn man von der Rechten zur Linken klassifizirt, und jeder Klasse drei Ziffern gibt, mit Ausnahme der letzten links stehenden Klasse, die auch ein oder zwei Ziffern haben darf.

Beweis von a: 1) Wenn man der Zahl 1 rechts so viele Nullen anhängt, als die andere Zahl Ziffern hat, so ist die erstere Zahl allemal größer (§. 3. a), d. h.,

$$10 > 9$$
$$100 > 89$$
$$1000 > 399, \text{ und allgemein}$$
$$10^n > (8945 \ldots . n);$$

2) Daher ist auch nach dem im III. Theil §. 70. aufgestellten II. Grundsatze

$$1000 > 9^3$$
$$1000000 > 89^3$$
$$1000000000 > 399^3, \text{ und}$$
$$10^{3n} > (8945 \ldots . n)^3;$$

3) Nun ist 1000 die kleinste Zahl von vier Ziffern, und größer als 9^3, also kann 9^3, oder überhaupt der Kubus einer Ziffer höchstens nur aus drei Ziffern bestehen, sonst wäre 9^3 = oder > 1000.

Eben so ist 1000000 die kleinste Zahl von sieben Ziffern, und größer als 89^3, daher kann der Kubus von 89, oder einer Zahl von zwei Ziffern nicht mehr als sechs Ziffern haben.

Ferner 1000000000 ist die kleinste Zahl von zehen Ziffern, und noch größer als 399^3, also kann der Ku-

bus von 399, oder überhaupt einer Zahl von drei Ziffern höchstens nur neun Ziffern haben.

Endlich der Kubus 10^{3n} ist die kleinste Zahl mit $3n+1$ Ziffern, und doch noch größer als der Kubus $(8945\ldots.n)^3$, daher kann dieser letztere Kubus nie mehr als $3n$ Ziffern enthalten, sonst müßte derselbe gleich oder größer, als 10^{3n} sein, was hier aber unmöglich ist, weil $10^{3n} > (8945\ldots.n)^3$.

Es ist also die Anzahl der Ziffern, woraus die Kubikzahl besteht, nie größer, als die dreifache Anzahl der Ziffern der Wurzel.

Beweis von b: 1) Unter Zahlen von gleich viel Ziffern ist jene die kleinste, die nur aus 1 mit beigefügten Nullen besteht, d. h.,

$$1 < 8$$
$$10 < 89$$
$$100 < 356$$
$$1000 < 4589, \text{ und überhaupt}$$
$$10^{n-1} < (348\ldots.n);$$

2) Die kleinere Zahl gibt immer den kleineren Kubus (III. §. 70. II.), daher ist

$$1 < 8^3$$
$$1000 < 89^3$$
$$1000000 < 356^3$$
$$1000000000 < 4589^3; \text{ und überhaupt}$$
$$10^{3n-3} < (348\ldots.n)^3;$$

3) Da nun 1 die kleinste Zahl mit einem Ziffer und $< 8^3$, 1000 die kleinste Zahl mit vier Ziffern und $< 89^3$, 1000000 die kleinste Zahl mit sieben Ziffern und $< 356^3$, 1000000000 die kleinste mit zehen Ziffern und $< 4589^3$, und endlich 10^{3n-3} die kleinste Zahl unter allen, die $3n-2$ Ziffern haben, und doch noch kleiner ist, als $(348\ldots.n)^3$, so muß der Kubus einer gegebenen Zahl allemal wenigstens dreimal so

viel Ziffern weniger zwei, als in der Wurzel vorkommen, oder $3n - 2$ Ziffern haben.

Ist z. B. die Zahl 23456789 gegeben, so hat man eine Zahl von drei Klassen, nämlich 23|456|789; um deswillen bekömmt die Wurzel drei Ziffern.

§. 11.

Lehrsatz:

Wird eine gegebene ganze Zahl von vier, fünf oder sechs Ziffern auf die so eben angezeigte Weise in Klassen getheilt, so kömmt das letzte Ziffer vom Kubus des ersten Theiles der herauszuziehenden Wurzel rücksichtlich des Lokalwerthes unter das letzte Ziffer der ersten Klasse, das letzte Ziffer vom dreifachen Quadrate des ersten Theiles in den zweiten unter das erste Ziffer, das letzte Ziffer vom dreifachen Quadrate des zweiten Theiles in den ersten unter das zweite Ziffer, und das letzte Ziffer vom Kubus des zweiten Theiles unter das letzte Ziffer der zweiten Klasse zu stehen.

I. Beweis:

1) Es sei die Zahl 140608 gegeben, diese hat zwei Klassen, von denen die Ziffern 140 die erste, und 608 die zweite Klasse bilden, weil auch hier, wie bei der Quadratwurzel, immerhin von der Linken zur Rechten gezählet wird;

2) Nach §. 10. hat bei einer Zahl von zwei Klassen die Wurzel auch zwei Ziffern, die man allgemein mit a und b bezeichnen kann;

3) Die Wurzel zum Kubus erhoben muß den gegebenen Kubus wieder geben, daher ist $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 140|608$;

4) Der erste Wurzeltheil a steht an der Stelle der Zehner, und a^3 bezeichnet deshalb Tausende; wenn man also die drei Nullen wegläßt, so kömmt bei einer

vorzunehmenden Subtraktion wegen des Lokalwerthes das letzte Ziffer von a^3, oder vom Kubus des ersten Theiles, unter das an der Stelle der Tausende stehende Ziffer, somit unter das letzte Ziffer der ersten Klasse zu stehen;

5) Das Produkt $3a^2b$ drückt Hunderte aus, weil b den Lokalwerth von Einern, a den von Zehnern, und also a^2 den Lokalwerth von Hunderten hat; läßt man daher die zwei Nullen beim Anschreiben weg, so kömmt das letzte Ziffer von $3a^2b$, oder vom dreifachen Quadrate des ersten Theiles in den zweiten unter das erste Ziffer der zweiten Klasse zu stehen;

6) Das Produkt $3ab^2$ hat den Lokalwerth von Zehnern, läßt man nun die Null weg, so kömmt das letzte Ziffer von $3ab^2$, oder vom dreifachen Quadrate des zweiten Theiles in den ersten unter das zweite Ziffer der zweiten Klasse zu stehen;

7) Der Kubus von b, oder b^3 ist so beschaffen, daß das letzte Ziffer in Absicht auf den Lokalwerth Einer bezeichnet, daher kömmt das letzte Ziffer von b^3, oder vom Kubus des zweiten Theiles unter das letzte Ziffer der zweiten Klasse zu stehen.

II. Beweis:

1) Weil die gegebene Kubikzahl vier, fünf oder sechs Ziffern, somit zwei Klassen hat, so bekömmt die Wurzel zwei Ziffern, von denen das erste Zehner, und das andere Einer bezeichnet;

2) Drückt man den natürlichen Werth des an der Stelle der Zehner stehenden Ziffers mit f, und den des anderen mit g aus, während beim ersteren der Lokalwerth durch den beigesetzten Faktor 10 bezeichnet wird, so erhält man allgemein zur Wurzel die zweigliederigte Größe $f \,.\, 10 + g$;

3) Erhebt man diese Wurzel zum Kubus, so findet man, daß $(f \,.\, 10 + g)^3 = f^3 \,.\, 1000 + 3f^2g \,.\, 100 + 3fg^2 \,.\, 10 + g^3$;

4) Hier bezeichnet das letzte Ziffer von f^3 Tausende, das von $3f^2g$ Hunderte, das von $3fg^2$ Zehner,

Zehner, und das von g^3 Einer, also muß das letzte Ziffer vom Kubus des ersten Theiles ꝛc.

1. Zusatz: Besteht die gegebene Kubikzahl aus drei Klassen, und hat sie somit sieben, acht oder neun Ziffern, so bekömmt die Wurzel drei Ziffern, und sie kann allgemein durch $a + b + c$ ausgedrückt werden, der Kubus davon ist $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b)c^2 + c^3$.

Hier hat a den Lokalwerth von Hunderten, b den von Zehnern, und c bedeutet Einer; daher erhält man durch a^3 Millionen, durch $3a^2b$ Hunderttausende, durch $3ab^2$ Zehentausende, und durch b^3 Tausende, und das letzte Ziffer von a^3 kömmt unter das letzte Ziffer der ersten Klasse, das letzte Ziffer von $3a^2b$ unter das erste Ziffer, das letzte Ziffer von $3ab^2$ unter das zweite, und das letzte Ziffer von b^3 unter das dritte Ziffer der zweiten Klasse zu stehen.

Addirt man Hunderte und Zehner, so erhält man eine Summe von Zehnern, d. h., eine Zahl, die am Ende eine Null hat, und deren Quadrat Hunderte, also eine Zahl mit zwei Nullen gibt; läßt man diese wieder weg, so kömmt das letzte Ziffer vom dreifachen Quadrate des ersten und zweiten Theiles in den dritten, oder von $3(a + b)^2 c$ unter das erste Ziffer, das letzte Ziffer vom dreifachen Quadrate des dritten Theiles in den ersten und zweiten, oder von $3(a + b)c^2$ unter das zweite Ziffer, und das letzte Ziffer vom Kubus des dritten Theiles, oder von c^3 unter das letzte Ziffer der dritten Klasse zu stehen.

Ist z. B. die Zahl 56789348 gegeben, so hat man eine Zahl von drei Klassen, nämlich 56|789|348, und 6 bezeichnet Millionen, 7 bezeichnet Hunderttausende ꝛc.; daher kömmt das letzte Ziffer vom Kubus des ersten Theiles ꝛc.

Setzet man $a = f . 100$, dann $b = g . 10$, und $c = h$, so ist $a + b + c = f . 100 + g . 10 + h$, und $(a + b + c)^3 = (f . 100 + g . 10 + h)^3 = f^3 . 1000000 + 3f^2g . 100000 + 3fg^2 . 10000 + g^3 . 1000 + 3(f . 10 + g)^2 h . 100 + 3(f . 10 + g) h^2 . 10 + h^3$; woraus man

wieder offenbar ersieht, daß das letzte Ziffer vom Kubus des ersten Theiles ꝛc.

II. Zusatz: Besteht eine Zahl aus wie immer vielen Ziffern, so kömmt wieder das letzte Ziffer vom Kubus des ersten Theiles unter das letzte Ziffer der ersten Klasse, das letzte Ziffer vom dreifachen Quadrate des ersten Theiles in den zweiten unter das erste Ziffer, das letzte Ziffer vom dreifachen Quadrate des zweiten Theiles in den ersten unter das zweite Ziffer, und das letzte Ziffer vom Kubus des zweiten Theiles unter das dritte Ziffer der zweiten Klasse zu stehen; nimmt man nun allemal die vorausgehenden Theile als einen Theil an, so kömmt immerhin das letzte Ziffer vom dreifachen Quadrate der vorausgehenden Theile in den folgenden unter das erste Ziffer, das dreifache Quadrat des folgenden Theiles in die vorausgehenden unter das zweite Ziffer, und der Kubus des folgenden Theiles unter das dritte Ziffer der folgenden Klasse zu stehen.

Wenn die gegebene Zahl $m + 1$ Klassen enthält, so besteht die Kubikwurzel aus eben so vielen Ziffern; man bezeichne das erste Ziffer mit f, das zweite mit g, aber ohne ihren Lokalwerth auszudrücken, so ist $a = f \,.\, 10^{m}$, und $b = g \,.\, 10^{m-1}$, folglich $a^3 = f^3 \,.\, 10^{3m}$, ferner $3a^2b = 3f^2g \,.\, 10^{3m-1}$, dann $3ab^2 = 3fg^2 \,.\, 10^{3m-2}$, und $b^3 = g^3 \,.\, 10^{3m-3}$, d. h., das letzte Ziffer vom Kubus des ersten Theiles ist von der Ordnung $3m$, und hat, weil noch m Klassen, oder $3m$ Ziffern folgen, mit dem letzten Ziffer der ersten Klasse gleichen Lokalwerth, ferner das letzte Ziffer vom dreifachen Quadrate des ersten Theiles in den zweiten ist von der Ordnung $3m - 1$, und hat mit dem ersten Ziffer der zweiten Klasse gleichen Lokalwerth, dann das letzte Ziffer vom dreifachen Quadrate des zweiten Theiles in den ersten ist von der Ordnung $3m - 2$, und hat mit dem zweiten Ziffer der zweiten Klasse den nämlichen Lokalwerth, und endlich das letzte Ziffer vom Kubus des zweiten Thei-

les ist von der Ordnung $3m - 3$, und hat mit dem dritten Ziffer der zweiten Klasse gleichen Lokalwerth.

Man drücke nun allemal die schon gefundene Wurzeltheile mit a, den folgenden mit b, und die Anzahl der noch folgenden Klassen mit n aus, und setze, weil in der Wurzel nach a noch n, und nach b noch $n - 1$ Ziffern folgen, $a = p \cdot 10^{n}$, und $b = q \cdot 10^{n-1}$, so ist $a^3 = p^3 \cdot 10^{3n}$, ferner $3a^2b = 3p^2q \cdot 10^{3n-1}$, dann $3ab^2 = 3pq^2 \cdot 10^{3n-2}$, und $b^3 = q^3 \cdot 10^{3n-3}$, und man ersieht daraus die Richtigkeit und allgemeine Giltigkeit des hier in Betreff des Lokalwerthes der Ziffern aufgestellten Gesetzes.

§. 12.

Beweis für die Richtigkeit der bei der Ausziehung der Kubikwurzeln in Zahlziffern vorkommenden Regeln.

Im III. Theile des Lehrbuches §. 36. sind für die Ausziehung der Kubikwurzeln in Zahlen die Regeln aufgestellt worden, derer Richtigkeit und allgemeine Giltigkeit aus den bisher aufgestellten Lehrsätzen auf folgende Weise bewiesen wird:

1) Theilet man die Zahl zu drei Ziffern in Klassen, so bekömmt man in der Wurzel so viele Ziffern, als Klassen vorhanden sind (§. 10.);

2) Alle Zahlen kann man, da sie eine Summe von Einern, Zehnern, Hunderten, Tausenden ꝛc. sind, als mehrgliederigte Größen betrachten, und somit das erste Ziffer der Wurzel nach dem Lokal- und dem natürlichen Werthe von der Linken zur Rechten mit a, das zweite mit b, das dritte mit c ꝛc., und die ganze Wurzel durch $a + b + c + \ldots$ ausdrücken;

3) Weil $(a + b + c + \ldots)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3\,(a + b)^2\,c + 3\,(a + b)\,c^2 + c^3 + \ldots$, und das letzte Ziffer von a^3 mit dem letzten Ziffer der ersten Klasse gleichen Lokalwerth hat (§. 11.), so ist der Kubus des ersten Wurzeltheiles in

der ersten Klasse enthalten; man muß also, um diesen zu finden, aus der ersten Klasse nach der im III. Theile des Lehrbuches §. 26. angeführten Tabelle die Kubikwurzel ausziehen, und auf eine ähnliche Weise, wie bei der Division mit ganzen Zahlen, den Kubus des ersten Theiles von der ersten Klasse abziehen, indem man bei der Subtraktion das letzte Ziffer desselben unter das letzte Ziffer der ersten Klasse schreibt (§. 11.);

4) In der Wurzel folgen von der Linken zur Rechten jedesmal so viele Ziffern, als viel Klassen noch übrig sind; um deswillen darf man zur Bezeichnung des den Ziffern zukommenden Lokalwerthes die Nullen nicht anschreiben, ausser in jenen Fällen, wo die Wurzeltheile bloße Nullen sind (III. §. 36. Nro. 7.);

5) Der Kubus besteht nebst dem Kubus der vorausgehenden Theile immer aus dem dreifachen Quadrate dieser Theile in den folgenden, dem dreifachen Quadrate des folgenden Theiles in die vorausgehenden, und aus dem Kubus des folgenden Theiles (§. 8. Zus. II.); daher dividire man allemal, um den folgenden Wurzeltheil zu finden, mit dem dreifachen Quadrate der schon gefundenen Wurzeltheile, und schreibe bei der Division das letzte Ziffer des Divisors unter das erste Ziffer der nächsten Klasse (§. 11. Zus. II.);

6) Man muß in Gemäßheit des aufgestellten allgemeinen Kubirungsgesetzes (§. 8. Zus. II.) allemal das dreifache Quadrat der vorausgehenden Theile in den folgenden, das dreifache Quadrat des folgenden Theiles in die vorausgehenden, und den Kubus des folgenden Theiles setzen;

7) Endlich muß man diese drei Produkte jederzeit auf die angezeigte Weise wegen des Lokalwerthes bei der vorzunehmenden Subtraktion aus dem im §. 11. Zus. II. angeführten Grunde unter einander schreiben.

Ich führe hier, wie bei der Ausziehung der Quadratwurzel (§. 5.), zwei Beispiele an, die nach den aufgestellten Formeln bearbeitet sind, und wähle hierzu die nämlichen, welche schon im III. Thl. §. 36. vorkommen.

I. Beispiel:

Es soll aus 157464 die Kubikwurzel ausgezogen werden.

Auf-

Auflösung:

$$157|464\{\,54 = a + b$$
$$a^3 = 125$$
$$32464$$
$$3a^2 = 75$$
$$3a^2b = 300$$
$$3ab^2 = 240$$
$$b^3 = 64$$
$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 32464$$

Daher ist $\sqrt[3]{157464} = 54.$

II. Beispiel:

Es soll aus 75.955'677.875 die Kubikwurzel ausgezogen werden.

Auflösung:

$$75|955|677|875\{\,4235 = a + b + c + d$$
$$a^3 = 64$$
$$11955$$
$$3a^2 = 48$$
$$3a^2b = 96$$
$$3ab^2 = 48$$
$$b^3 = 8$$
$$a^2b + 3ab^2 + b^3 = 10088$$
$$1867677$$
$$3(a+b)^2 = 5292$$
$$3(a+b)^2c = 15876$$
$$3(a+b)c^2 = 1134$$
$$c^3 = 27$$
$$3(a+b)^2c \text{ rc.} = 1598967$$
$$268710875$$
$$3(a+b+c)^2 = 536787$$
$$3(a+b+c)^2d = 2683935$$
$$3(a+b+c)d^2 = 31725$$
$$d^3 = 125$$
$$3(a+b+c)^2d \text{ rc.} = 268710875$$

Mithin ist $\sqrt[3]{75.955'677.875} = 4235.$

§. 13.

Lehrsatz:

Erhebt man die in ganzen Zahlen gefundene Kubikwurzel zum Kubus, und zählt man den Rest, im Falle zuletzt einer geblieben ist, dazu, so erhält man den gegebenen Kubus wieder.

Beweis:

1) Nach den im III. Thl. §. 36. bei der Ausziehung der Kubikwurzel aufgestellten Regeln werden nach und nach alle Theile des Kubus von der gegebenen Kubikzahl abgezogen; bezeichnet man daher den Kubus mit A, die in ganzen Zahlen gefundene Wurzel mit n, und den Rest mit R, so ist $A - n^3 = R$;

2) Transponirt man n^3, um den Werth von A auszudrücken (III. §. 96. Zus. I.), so ist $A = n^3 + R$, d. h., der gegebene Kubus ist gleich der Summe aus dem Kubus der Wurzel und dem zuletzt gebliebenen Reste.

I. Zusatz: Die gefundene Wurzel ist zu groß, wenn ihr Kubus größer ist, als die gegebene Kubikzahl.

II. Zusatz: Bei der Ausziehung der Kubikwurzel muß der Rest allemal kleiner sein als das dreifache Quadrat der Wurzel, dazu addirt die dreifache Wurzel, und 1, d. h., R muß kleiner sein als $3n^2 + 3n + 1$.

Man nehme an, R sei $= 3n^2 + 3n + 1$, so ist $A = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, weil $A = n^3 + R$, und auf diese Weise Gleiches anstatt des Gleichen gesetzt wird; ferner bei gleichen Größen sind auch die Kubikwurzeln gleich (III. §. 70.), daher ist $\sqrt[3]{} = \sqrt[3]{(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)} = n + 1$, d. h., die gefundene Wurzel n ist jetzt um 1 zu klein.

Man setze $R > 3n^2 + 3n + 1$, so ist $A > n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, weil $A = n^3 + R$, und auf

diese Weise die größere Zahl R weggelassen, und dagegen die kleinere $3n^2 + 3n + 1$ hingesetzt wird; überdieß gibt die größere Zahl die größere Kubikwurzel, also ist $\sqrt[3]{A} > \sqrt[3]{(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}$, oder $\sqrt[3]{A} > n + 1$, d. h., die gefundene Kubikwurzel n ist wieder zu klein, weil die wahre Wurzel größer ist, als die um 1 vermehrte Wurzel n.

Da nun der Rest weder gleich $3n^2 + 3n + 1$, noch größer als $3n^2 + 3n + 1$ sein darf, so muß er allemal kleiner sein, als diese Summe (III. §. 37. Zus. II.), oder $R < 3n^2 + 3n + 1$.

III. Zusatz: Wenn beim Ausziehen der Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl A am Ende ein Rest bleibt, so ist die Kubikwurzel von A eine Irrationalzahl, weil es dann weder eine ganze, noch eine gebrochene Zahl gibt, die zum Kubus erhoben die gegebene Kubikzahl wieder gibt (III. §. 72. Zus. IV.).

§. 14.

Beweis für die Richtigkeit jener Regeln, nach welchen die Kubikwurzel einer gegebenen ganzen Zahl durch Annäherung gefunden wird.

Im III. Theile des Lehrbuches §. 37. sind die Regeln aufgestellt worden, nach welchen bei unvollkommenen Kubikzahlen in ganzen Zahlen die Kubikwurzeln gefunden werden; ich führe jetzt darüber folgende Beweisgründe an:

1) Es werde die gegebene Kubikzahl allgemein durch A, die Anzahl der beigesetzten Klassen von Nullen durch n, und daher die Anzahl der beigefügten Nullen durch 3n ausgedrückt;

2) Durch die Hinzusetzung der Nullen ist die gegebene Kubikzahl in eine andere, nämlich in $A \cdot 10^{3n}$ verändert worden;

3) Damit man die verlangte wahre Wurzel von A findet, muß man die Zahl $A \cdot 10^{3n}$ auch mit 10^{3n}

dividiren, indem $A = \frac{A \cdot 10^{3n}}{10^{3n}}$, und somit $\sqrt[3]{A} =$

$\sqrt[3]{\left(\frac{A \cdot 10^{3n}}{10^{3n}}\right)}$;

4) Aus einem Bruche wird die Wurzel ausgezogen, wenn man sie aus dem Zähler und Nenner auszieht; die Wurzel von $A \cdot 10^{3n}$, oder $\sqrt[3]{A \cdot 10^{3n}}$ besteht aus den bei der wirklichen Ausziehung gefundenen Zahlziffern, und nach III. §. 78. Zus. I. ist die Kubikwurzel von 10^{3n}, oder $\sqrt[3]{10^{3n}} = 10^{n}$;

5) Erhebt man 10 zur n^{ten} Würde, so erhält man 1 mit n angehängten Nullen zum Produkte; man muß also die gefundenen Zahlziffern mit 1 und n angehängten Nullen, oder mit 10^{n} dividiren, d. h., in der Wurzel sind von der Rechten zur Linken so viele Dezimalen abzuschneiden, als viel Klassen von Nullen beigesetzt worden sind.

Aus diesen Gründen hat man im III. Theile §. 37. aus der Zahl 3 die Kubikwurzel durch Annäherung bis auf drei Dezimalstellen bestimmt, indem man drei Klassen von Nullen, somit zusammen neun Nullen beim Ausziehen der Wurzel beisetzte, und deshalb von der Rechten zur Linken drei Dezimalen abschnitt; denn 3 ist $= \frac{3.1000000000}{1000000000} = \frac{3000000000}{1000000000}$, und daher ist

$$\sqrt[3]{3} = \frac{\sqrt[3]{3000000000}}{\sqrt[3]{1000000000}} = \frac{1442}{1000} = 1\frac{442}{1000} = 1{,}442\ldots$$

Anmerkung: Hier kömmt in Betreff der im III. Thl. §. 38. und 39. aufgestellten Regeln das Nämliche in Anwendung, was im §. 7. in der beigefügten Anmerkung gesagt wurde.

II. Hauptstück.

Von den Gleichungen.

I. Abschnitt.

Von der Auflösung einfacher Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen.

§. 15.

Die Auflösung einfacher Gleichungen mit zwei unbekannten Größen.

I. Auflösung durch die Substitution.

Wenn zwei verschiedene Gleichungen gegeben sind, und in diesen zwei unbekannte Größen vorkommen, so geschieht die Auflösung nach folgenden Regeln:

1) Man suche in einer Gleichung den Werth einer unbekannten Größe;

2) Man setze den Werth dieser Größe in der andern Gleichung, indem auf diese Weise Gleiches anstatt des Gleichen gesetzt wird (I. §. 10. Nro. 10.);

3) Man erhält eine neue Gleichung, in welcher nur mehr eine unbekannte Größe vorkömmt; in dieser Gleichung suche man die unbekannte Größe nach den im III. Thl. §. 98. aufgestellten Regeln;

4) Um auch die andere unbekannte Größe zu finden, substituire man anstatt der ersten unbekannten Größe den gefundenen gleichen Werth, man erhält dadurch eine zweite Gleichung, wo nur eine unbekannte Größe vorkömmt, die nach dem so eben zitirten §. gefunden werden kann;

5) Zur Probe setze man anstatt der beiden unbekannten Größen die gefundenen gleichen Werthe, und es müssen, im Falle die Rechnung richtig ist, die beiden Gleichungen wahr und den aufgestellten Bedingungen gemäß sein.

Beispiel:

Es seien diese zwei Gleichungen gegeben:

$$x + y = a,$$
$$x - y = b.$$

Auflösung:

1) Man drücke in der ersten Gleichung den Werth von x aus, und substituire diesen in der zweiten anstatt x.

$$\begin{matrix} x + y = a \\ x - y = b \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} x = a - y, \\ a - y - y = b, \\ a - 2y = b; \end{array} \right.$$

2) In der neuen Gleichung $a - 2y = b$ suche man den Werth von y, weil hier nur mehr eine unbekannte Größe vorkömmt:

$$a - 2y = b,$$
$$a - b = 2y,$$
$$\frac{a - b}{2} = y, \text{ oder}$$

$$y = \frac{a - b}{2} = \tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2} b;$$

3) In einer der beiden anfangs gegebenen Gleichungen, etwa in der ersten, setze man anstatt y den gefundenen Werth, und man erhält eine neue Gleichung, in der nur die unbekannte Größe x vorkömmt:

$$x + y = a,$$
$$y = \frac{a - b}{2},$$
$$\overline{}$$
$$x + \frac{a - b}{2} = a;$$

4) Hier suche man x, und es ist dadurch auch die erste unbekannte Größe gefunden:

$$x + \frac{a - b}{2} = a,$$
$$x = a + \frac{b - a}{2} = \frac{2a - a + b}{2} = \frac{a + b}{2};$$

5) Zur Probe setze man anstatt x und y die gefundenen Werthe, um zu sehen, ob man den aufgestellten Bedingungen gemäß die unbekannten Größen gefunden hat:

$$x = \frac{a + b}{2} = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b,$$
$$y = \frac{a - b}{2} = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b,$$

also $x + y = \left(\frac{a + b}{2}\right) + \left(\frac{a - b}{2}\right) = a,$

und $x - y = \left(\frac{a + b}{2}\right) - \left(\frac{a - b}{2}\right) = b.$

Daher hat man wirklich überhaupt solche zwei Zahlen gefunden, derer Summe $= a$, und derer Differenz $= b$ ist, mithin ist die vorgenommene Auflösung richtig.

II. Auflösung durch die Komparation, oder die Vergleichung der Werthe.

1) Man drücke den Werth von einer unbekannten Größe, z. B., von x in beiden Gleichungen aus;

2) Man setze diese beiden Werthe nach dem im I. Thl. §. 10. aufgestellten vierten Grundsatze

einander gleich, so erhält man eine Gleichung, in der nur mehr eine unbekannte Größe vorkömmt, weil die eine x aus dieser Gleichung weggeschafft oder eliminirt ist;

3) In der letzteren Gleichung suche man die noch vorkommende andere unbekannte Größe, und verfahre dann, um auch die erste unbekannte Größe zu finden, auf die vorhin angezeigte Weise;

4) Zur Probe setze man anstatt x und y die gefundenen Werthe, und es muß, im Falle die Auflösung richtig ist, $x + y$ wirklich gleich a, $x - y$ gleich b sein.

Beispiel:

Es seien diese Gleichungen gegeben:

$$x + y = a,$$
$$x - y = b.$$

Auflösung:

1) Man drücke den Werth von x in beiden Gleichungen aus:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = b \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = a - y, \\ x = b + y \end{array}$$

2) Daher ist

$$\begin{aligned} b + y &= a - y, \\ b + y + y &= a, \\ b + 2y &= a, \\ 2y &= a - b, \\ y &= \frac{a - b}{2} = \tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2} b; \end{aligned}$$

3) Anstatt y setze man wieder den gleichen Ausdruck $\frac{a - b}{2}$, und man findet auch x:

$$x + y = a,$$
$$y = \frac{a - b}{2}$$

daher $x + \frac{a - b}{2} = a,$

$$x = a + \frac{b - a}{2} = \frac{2a - a + b}{2} = \frac{a + b}{2};$$

4) Zur Probe setze man in den beiden ersten Gleichungen anstatt x und y die gefundenen Werthe:

$$x + y = a,$$
$$x - y = b$$

$$\frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2} = \frac{2a}{2} = a, \text{ und}$$
$$\frac{a + b}{2} - \frac{a - b}{2} = \frac{2b}{2} = b.$$

III. Auflösung durch die Addition oder Subtraktion.

1) Will man in den beiden gegebenen Gleichungen die unbekannte Größe x eliminiren, um zuerst y zu finden, so multiplizire man mit dem Koeffizienten der Größe x in der ersten Gleichung die zweite, und jene mit dem Koeffizienten, den x in der zweiten Gleichung hat: hat die Größe in beiden Gleichungen den nämlichen Koeffizienten, so unterbleibt diese Multiplikation;

2) Nun addire man zur ersten Gleichung die zweite, wenn in beiden Gleichungen die Größe x verschiedene, und subtrahire sie von einander, wenn diese Größe gleiche Zeichen hat;

3) Die Summe, oder im zweiten Falle der Rest, gibt eine neue dritte Gleichung mit einer unbekannten Größe, welche auf die angezeigte Weise gefunden wird;

4) Anstatt y setze man nun wieder, wie vorhin, in einer der beiden anfangs gegebenen Gleichungen den gleichen Werth, um auch die unbekannte Größe x zu finden;

5) Zur Probe setze man anstatt x und y die gefundenen Werthe, und sehe, ob diese den aufgestellten Bedingungen gemäß sind.

Beispiel:

Es seien diese zwei Gleichungen gegeben:

$$2x + y = m,$$
$$3x + 5y = n.$$

Auflösung:

1) Weil x verschiedene Koeffizienten hat, so multiplizire man mit 2 die untere, und mit 3 die obere Gleichung, damit die Größe x in beiden Gleichungen den nämlichen Koeffizienten erhält:

$$2x + y = m,$$
$$3x + 5y = n,$$
$$\overline{}$$
$$6x + 3y = 3m,$$
$$6x + 10y = 2n;$$

2) Man subtrahire die zweite Gleichung von der ersten, und ändere in der neuen Gleichung alle Zeichen, damit die Größe y positiv wird (III. §. 96. Zus. II.):

$$6x + 3y = 3m,$$
$$6x + 10y = 2n,$$
$$- \quad - \qquad -$$
$$\overline{}$$
$$-7y = 3m - 2n,$$
$$7y = 2n - 3m;$$

3) Hier suche man y, setze den gefundenen gleichen Werth in einer der anfangs gegebenen Gleichungen, und suche da auch x:

$$7y = 2n - 3m,$$ daher
$$y = \frac{2n - 3m}{7},$$ dann
$$2x + y = m,$$ also ist
$$2x + \frac{2n - 3m}{7} = m,$$ ferner
$$14x + 2n - 3m = 7m,$$
$$14x = 7m - 2n + 3m,$$
$$x = \frac{7m - 2n + 3m}{14} = \frac{10m - 2n}{14},$$

mithin ist $x = \frac{10m - 2n}{14} = \frac{5m - n}{7}$;

4) Zur Probe setze man in den beiden anfangs gegebenen Gleichungen anstatt x und y die gefundenen Werthe:

$$2x + y = m,$$
$$2\left(\frac{5m - n}{7}\right) + \frac{2n - 3m}{7} = m,$$
$$\frac{10m - 2n + 2n - 3m}{7} = m,$$
$$\frac{7m}{7} = m;$$

Dann in der zweiten Gleichung:

$$3x + 5y = n,$$
$$3\left(\frac{5m - n}{7}\right) + 5\left(\frac{2n - 3m}{7}\right) = n,$$
$$\frac{15m - 3n + 10n - 15m}{7} = n,$$
$$\frac{7n}{7} = n.$$

Die vorstehende Auflösung ist also richtig, weil den bei dieser Aufgabe gesetzten Bedingungen gemäß $2x + y$ gleich m, und $3x + 5y$ wirklich $= n$ ist.

Anmerkung: 1) Für zwei unbekannte Größen müßen, im Falle die Aufgabe bestimmt ist, zwei verschiedene, d. h., zwei solche Gleichungen gegeben sein, die nicht auseinander gefolgert werden, damit jede aus eigenen Bedin-

gungen der unbekannten Größen gebildet ist, und somit die Gleichungen verschieden, und nicht identisch sind. Das Nämliche ist auch in Absicht auf alle jene bestimmten Aufgaben zu bemerken, bei welchen mehr als zwei unbekannte Größen gesucht werden.

2) In dem bei der ersten und zweiten Auflösung angeführten Beispiele mußte man zur gegebenen Summe und Differenz zweier Zahlen die Zahlen selbst suchen, weil es hieß $x + y = a$, und $x - y = b$; um deswillen wurde da eine andere Auflösung gezeigt, als diejenige ist, die in Betreff dieses Problems im III. Theile des Lehrbuches §. 68. vorkömmt.

§. 16.

Die Auflösung einfacher Gleichungen mit wie immer vielen unbekannten Größen.

Wenn wie immer viele unbekannte Größen gesucht werden, und so viele verschiedene Gleichungen aus den Bedingungen gebildet sind, als solche Größen vorkommen, so geschieht die Auflösung auf folgende Weise:

I. Durch die Substitution.

1) Man drücke in einer Gleichung den Werth von einer unbekannten Größe, etwa den von x, aus, und setze anstatt x in allen übrigen Gleichungen, in welchen x vorkömmt, den gleichen Werth: jene Gleichungen, in welchen x nicht vorkömmt, werden unverändert beibehalten;

2) Man erhält dadurch um eine Gleichung weniger, als zuerst gegeben waren: benennt man die Anzahl der anfangs gegebenen mit n, so hat man $n - 1$ Gleichungen, wo x weggeschafft ist;

3) In diesen $n - 1$ Gleichungen drücke man den Werth einer darin vorkommenden unbekannten Größe, etwa den von y, aus, und setze ihn in allen übrigen Gleichungen anstatt y;

4) Dadurch erhält man $n - 2$ Gleichungen, in welchen weder x noch y vorkömmt;

5) Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis man zuletzt eine Gleichung gefunden hat, in der nur mehr eine einzige unbekannte Größe ist, die auf die bekannte Weise gesucht wird;

6) In einer Gleichung, in welcher nebst dieser gefundenen Größe nur mehr eine andere unbekannte Größe vorkömmt, setze man anstatt jener den bekannten Werth, und suche diese;

7) Hierauf setze man in einer der vorhandenen Gleichungen, wo nur drei unbekannte Größen sind, diese beiden bekannten Werthe, um die dritte unbekannte Größe zu finden, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man alle unbekannten Größen gefunden hat;

8) Zur Probe setze man anstatt der unbekannten Größen ihre Werthe, und es müssen die anfangs gegebenen Gleichungen wahr und richtig sein.

Beispiel:

Es seien folgende Gleichungen gegeben:

$$x + \frac{y + z}{2} = a,$$

$$y + \frac{x + z}{3} = b,$$

$$z + \frac{x + y}{4} = c;$$

Auflösung:

1) Man hebe zuerst durch Multiplikation, um die folgenden Veränderungen zu erleichtern, die Brüche auf (III. §. 97. b.):

$$2x + y + z = 2a,$$
$$3y + x + z = 3b,$$
$$4z + x + y = 4c.$$

2) Man drücke den Werth von x in der ersten Gleichung aus, setze diesen in den beiden übrigen

Gleichungen, und hebe in den neuen Gleichungen die Brüche auf, während man zugleich wirklich addirt, und subtrahirt, wo es immer möglich ist, um die Gleichungen in einer einfacheren Form zu erhalten:

$$2x + y + z = 2a,$$
$$x = \frac{2a - y - z}{2},$$

$$3y + x + z = 3b,$$
$$4z + x + y = 4c,$$

$$3y + \frac{2a - y - z}{2} + z = 3b,$$
$$4z + \frac{2a - y - z}{2} + y = 4c,$$

$$6y + 2a - y - z + 2z = 6b,$$
$$8z + 2a - y - z + 2y = 8c,$$

$$5y + 2a + z = 6b,$$
$$7z + 2a + y = 8c;$$

3) Man drücke in der ersten dieser beiden letzten Gleichungen den Werth von y aus, und setze ihn in der zweiten Gleichung, in welcher dann z gesucht wird:

$$5y + 2a + z = 6b,$$
$$y = \frac{6b - 2a - z}{5},$$

$$7z + 2a + y = 8c,$$

$$7z + 2a + \frac{6b - 2a - z}{5} = 8c,$$
$$35z + 10a + 6b - 2a - z = 40c,$$
$$34z + 8a + 6b = 40c,$$
$$34z = 40c - 8a - 6b,$$
$$z = \frac{40c - 8a - 6b}{34} = \frac{20c - 4a - 3b}{17};$$

4) Um y zu finden, setze man in der Gleichung bei Nro. 3, in welcher der Werth von y ausgedrückt ist, und somit diese Größe allein auf einer Seite vorkömmt, anstatt z den gefundenen gleichen Werth:

$$y = \frac{6b - 2a - z}{5},$$

$$z = \frac{20c - 4a - 3b}{17},$$

$$y = \left(6b - 2a + \frac{4a + 3b - 20c}{17}\right) : 5$$

$$= \left(\frac{102b - 34a + 4a + 3b - 20c}{17}\right) : 5$$

$$= \left(\frac{105b - 30a - 20c}{17}\right) : 5$$

$$= \frac{21b - 6a - 4c}{17};$$

5) Um endlich x zu finden, setze man in der Gleichung bei Nro. 2, in welcher der Werth von x ausgedrückt ist, anstatt y und z die gefundenen Werthe:

$$x = \frac{2a - y - z}{2},$$

$$y = \frac{21b - 6a - 4c}{17},$$

$$z = \frac{20c - 4a - 3b}{17},$$

$$x = \left(2a + \frac{6a + 4c - 21b + 4a + 3b - 20c}{17}\right) : 2$$

$$= \left(\frac{34a + 6a + 4c - 21b + 4a + 3b - 20c}{17}\right) : 2$$

$$= \left(\frac{44a - 18b - 16c}{17}\right) : 2$$

$$= \frac{22a - 9b - 8c}{17};$$

6) Zur Probe setze man in jeder der anfangs gegebenen Gleichungen anstatt x, y und z die gefundenen Werthe, und man muß wieder a, b und c erhalten. Ich mache der Kürze wegen die Probe nur in

Absicht auf die erste Gleichung, man sieht alsdann schon, wie man in dieser Hinsicht bei den beiden übrigen zu verfahren hat:

$$x + \frac{y + z}{2} = a,$$

$$\frac{22a - 9b - 8c}{17} + \left(\frac{21b - 6a - 4c}{17} + \frac{20c - 4a - 3b}{17}\right) : 2 = a,$$

$$(44a - 18b - 16c + 21b - 6a - 4c + 20c - 4a - 3b) : 34 = a,$$

$$\frac{34a + 21b - 21b + 20c - 20c}{34} = a,$$

$$\frac{34a}{34} = a.$$

II. Durch die Komparation.

1) Man drücke in allen n Gleichungen den Werth der nämlichen unbekannten Größe, etwa den von x, aus, und setze von diesen Werthen den ersten dem zweiten, diesen dem dritten rc. gleich, bis man n — 1 Gleichungen hat, in welchen x nicht mehr vorkömmt: ist x in einer oder der anderen Gleichung nicht, so behält man diese unverändert für die folgenden Operationen bei;

2) In diesen neuen Gleichungen drücke man allemal den Werth von y aus, und setze diese Werthe auf die vorige Weise einander gleich, man erhält n — 2 neue Gleichungen, in welchen x und y nicht mehr vorkömmt;

3) Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis man zuletzt eine Gleichung mit einer unbekannten Größe erhält;

4)

4) Sobald man diese nach den im III. Theile §. 98. aufgestellten Regeln gefunden hat, so verfahre man auf die so eben bei der Auflösung durch die Substitution angezeigte Weise, um auch die übrigen unbekannten Größen zu finden, und über die gefundenen Resultate die Probe anzustellen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ y + z &= b, \\ z + u &= c, \\ x + z &= d. \end{aligned}$$

Auflösung:

1) Man drücke in der ersten und vierten Gleichung den Werth von x aus, und setze diese Werthe sich gleich, während man die beiden anderen Gleichungen unverändert beibehält:

$$\begin{array}{l} x + y = a \\ y + z = b \\ z + u = c \\ x + z = d \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = a - y, \\ \underline{x = d - z,} \\ a - y = d - z, \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} a - y &= d - z, \\ y + z &= b, \\ z + u &= c; \end{aligned}$$

2) In diesen Gleichungen drücke man den Werth von y aus, und setze diese Werthe sich gleich, während die letzte Gleichung unverändert bleibt:

$$\begin{array}{l} a - y = d - z \\ y + z = b \\ z + u = c \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y = a - d + z, \\ \underline{y = b - z,} \\ a - d + z = b - z, \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} a - d + z &= b - z, \\ z + u &= c; \end{aligned}$$

3) In der ersten der beiden letzten Gleichungen kömmt z schon allein als unbekannte Größe vor; man suche nun hier z, und setze den gleichen Werth in der zweiten Gleichung:

$$a - d + z = b - z,$$
$$2z = b - a + d,$$
$$z = \frac{b - a + d}{2},$$

$$z + u = c,$$
$$\frac{b - a + d}{2} + u = c,$$
$$u = c + \frac{a - b - d}{2} = \frac{2c + a - b - d}{2};$$

4) In den vorausgehenden Gleichungen setze man für z und u die gefundenen Werthe, um auch y und x zu finden:

$$y = a - d + z,$$
$$z = \frac{b - a + d}{2},$$

$$y = a - d + \frac{b - a + d}{2},$$
$$= \frac{2a - 2d + b - a + d}{2} = \frac{a + b - d}{2},$$

$$x = a - y,\ y = \frac{a + b - d}{2},$$
$$x = a + \frac{d - a - b}{2},$$
$$= \frac{2a + d - a - b}{2} = \frac{a + d - b}{2};$$

5) Endlich mache man die Probe, indem man in den ersten vier Gleichungen die gefundenen Werthe substituirt:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= a \\ y + z &= b \\ z + u &= c \\ x + z &= d \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \frac{a + d - b}{2}, \\ y &= \frac{a + b - d}{2}, \\ z &= \frac{b - a + d}{2}, \\ u &= \frac{2c + a - b - d}{2}, \end{aligned}$$

$$\frac{a + d - b}{2} + \frac{a + b - d}{2} = \frac{2a}{2} = a,$$

$$\frac{a + b - d}{2} + \frac{b - a + d}{2} = \frac{2b}{2} = b,$$

$$\frac{b - a + d}{2} + \frac{2c + a - b - d}{2} = c,$$

$$\frac{a + d - b}{2} + \frac{b - a + d}{2} = \frac{2d}{2} = d.$$

III. Auflösung durch die Addition oder Subtraktion.

1) Man verbinde nach den im vorigen §. aufgestellten Regeln durch Addition oder Subtraktion so die erste Gleichung mit der zweiten, die zweite mit der dritten ꝛc., daß man $n - 1$ Gleichungen erhält, in denen die unbekannte Größe x nicht mehr vorkömmt;

2) Auf die nämliche Weise verfahre man bei diesen $n - 1$ Gleichungen, um $n - 2$ Gleichungen zu erhalten, in welchen x und y nicht mehr vorkömmt, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man eine Gleichung hat, in welcher nur mehr eine unbekannte Größe ist;

3) Hat man diese gefunden, so verfahre man, wie bei der ersten nnd zweiten Auflösung, um auch

die übrigen unbekannten Größen zu finden, und mache dann auf die bekannte Weise die Probe.

Beispiel:

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ x + z &= b, \\ y + z &= c. \end{aligned}$$

Auflösung:

1) Man subtrahire die zweite Gleichung von der ersten, und setze zur neuen Gleichung die dritte:

$$\begin{array}{l} x + y = a, \\ x + z = \;\; b, \\ - \;\; - \;\;\;\; - \\ \hline y - z = a - b, \\ y + z = c; \end{array}$$

2) Man addire diese beiden Gleichungen, und suche in der neuen Gleichung y:

$$\begin{array}{l} y - z = a - b, \\ y + z = c, \\ \hline 2y = a + c - b, \\ y = \frac{a + c - b}{2}; \end{array}$$

3) Nun suche man auch die übrigen unbekannten Größen, indem man anstatt y den bekannten Werth substituirt:

$$\begin{array}{l} x + y = a, \\ y = \frac{a + c - b}{2}, \\ \hline x + \frac{a + c - b}{2} = a, \end{array}$$

$$x = a + \frac{b - a - c}{2}$$

$$= \frac{2a + b - a - c}{2} = \frac{a + b - c}{2}$$

$$y + z = c,$$

$$y = \frac{a + c - b}{2},$$

$$\frac{a + c - b}{2} + z = c,$$

$$z = c + \frac{b - a - c}{2},$$

$$= \frac{2c + b - a - c}{2} = \frac{b + c - a}{2};$$

4) In Absicht auf die Probe ist die Verfahrungsweise aus den vorausgehenden Beispielen ersichtlich.

Anmerkung: 1) Aus der vorliegenden Aufgabe muß man selbst ermessen, welche von den hier angeführten Auflösungen die bequemste ist;

2) Aus n verschiedenen Gleichungen lassen sich allemal n — 1 unbekannte Größen wegschaffen, und aus n Gleichungen kann man n unbekannte Größen finden, weil immer eine solche Gleichung gefunden werden kann, die nur eine beliebige der unbekannten Größen enthält, deren Werth also dadurch bestimmt ist.

3) Eine Aufgabe ist bestimmt, oder alle Werthe der unbekannten Größe sind bestimmt, wenn durch die Bedingungen so viele Gleichungen gegeben sind, als in ihr unbekannte Größen vorkommen; übersteigt die Anzahl der unbekannten Größen jene der Gleichungen, so ist die Aufgabe unbestimmt, und im umgekehrten Falle mehr als bestimmt.

4) Je mehr unbekannte Größen vorkommen, desto schwerer ist die Auflösung. Es ist um deßwillen nothwendig, die Aufgabe genau zu prüfen, und, wenn zwei oder mehrere unbekannte Größen darin vorkommen, zu untersuchen, ob nicht eine durch die andere bestimmt wird, so daß durch die Kenntniß der einen die andere auch bekannt ist, damit man nicht mehrere unbekannte Größen annehme, als eigentlich in der Aufgabe gegeben sind, und durch unrichtige Bezeichnung die Aufgabe erschwere.

§. 17.

Beispiele zur Uebung.

I.

Ein Maulesel und ein Esel tragen einige Schäffel Getraid. Der Esel beschwert sich über seine Last, und sagt zum Maulesel: Wenn du mir ein Schäffel von deiner Last gäbest, so hätte ich zweimal so viel, als du. Darauf antwortete der Maulesel: Wenn du mir ein Schäffel von deiner Last gäbest, so hätte ich dreimal so viel als du.

Wie viel Schäffel trug nun der Esel, und wie viel der Maulesel?

Auflösung durch die Substitution.

1) Die Anzahl der Schäffel, die der Esel trug, sei $= x$, und die des Maulesels $= y$;

2) Erhält der Esel ein Schäffel dazu, so hat er $x + 1$, und dann der Maulesel $y - 1$; bekömmt aber dieser von jenem ein Schäffel, so hat er $y + 1$ und dann der Esel $x - 1$;

3) Man erhält also folgende zwei Gleichungen:

$$x + 1 = (y - 1) \times 2 = 2y - 2,$$
$$y + 1 = (x - 1) \times 3 = 3x - 3;$$

4) Man drücke in der ersten Gleichung den Werth von x aus, setze ihn in der zweiten dreifach, weil da $3x$ vorkömmt, und suche in der neuen Gleichung y:

$$\begin{aligned} x + 1 &= 2y - 2, \\ y + 1 &= 3x - 3, \\ \hline x &= 2y - 2 - 1 = 2y - 3, \\ y + 1 &= 3(2y - 3) - 3 = 6y - 9 - 3, \\ y + 1 &= 6y - 12, \\ 1 + 12 &= 6y - y, \\ 13 &= 5y, \text{ also} \\ y &= {}^{13}/_{5} = 2\,{}^{3}/_{5}; \end{aligned}$$

5) Anstatt y setze man in der ersten Gleichung den gleichen Werth, um auch x zu finden:

$$x + 1 = 2y - 2,$$
$$y = 2\tfrac{3}{5},$$

$$x + 1 = 2 \times 2\tfrac{3}{5} - 2 = 5\tfrac{1}{5} - 2,$$
$$x = 5\tfrac{1}{5} - 2 - 1 = 2\tfrac{1}{5};$$

6) Man mache nun hierüber die Probe:

$$x + 1 = (y - 1) \times 2,$$
$$2\tfrac{1}{5} + 1 = (2\tfrac{3}{5} - 1)\,2,$$
$$3\tfrac{1}{5} = 1\tfrac{3}{5} \times 2 = 3\tfrac{1}{5},$$

$$y + 1 = (x - 1) \times 3,$$
$$2\tfrac{3}{5} + 1 = (2\tfrac{1}{5} - 1) \times 3,$$
$$3\tfrac{3}{5} = 1\tfrac{1}{5} \times 3 = 3\tfrac{3}{5};$$

Woraus man ersieht, daß die gemachte Auflösung richtig ist.

II.

Die erste Person sagt zur zweiten: Wenn du mir die Hälfte deines Geldes gibst, so habe ich mit dem meinigen 30 fl. Die zweite sagt zur dritten: Wenn du mir die Hälfte deines Geldes gibst, so habe ich mit dem meinigen auch 30 fl. Endlich die dritte Person sagt zur zweiten: Wenn du mir zwei Fünftel deines Geldes gibst, so habe ich ebenfalls 30 fl.

Es ist nun die Frage, wie viel Geld hat jede dieser Personen gehabt?

Auflösung durch die Komparation.

1) Nach den hier gesetzten Bedingungen erhält man folgende drei Gleichungen, in welchen die Brüche aufgehoben werden:

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{y}{2} &= 30 \\ y + \frac{z}{2} &= 30 \\ z + \frac{2y}{5} &= 30 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 2x + y &= 60, \\ 2y + z &= 60, \\ 5z + 2y &= 150; \end{aligned}$$

2) Weil x in den zwei letzten Gleichungen nicht vorkömmt, so drücke man von y nur in diesen Gleichungen die Werthe aus, und setze sie sich gleich:

$$\left.\begin{array}{l} 2y + z = 60 \\ 5z + 2y = 150 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \frac{60 - z}{2}, \\ y = \frac{150 - 5z}{2}, \end{array}$$

$$\frac{60 - z}{2} = \frac{150 - 5z}{2};$$

3) Dadurch hat man jetzt schon eine Gleichung mit einer unbekannten Größe, welche gesucht wird:

$$\frac{60 - z}{2} = \frac{150 - 5z}{2},$$

$$60 - z = 150 - 5z,$$

$$5z - z = 150 - 60,$$

$$4z = 90,$$

$$z = \frac{90}{4} = 22\tfrac{2}{4} = 22\tfrac{1}{2};$$

4) Nun suche man y und x:

$$y = \frac{60 - z}{2},$$

$$z = 22\tfrac{1}{2},$$

$$y = \frac{60 - 22\frac{1}{2}}{2} = 37\tfrac{1}{2} : 2,$$

$$= \tfrac{75}{2} : 2 = \tfrac{75}{4} = 18\tfrac{3}{4},$$

$$2x + y = 60,\ y = 18\tfrac{3}{4},$$

$$2x + 18\tfrac{3}{4} = 60,$$

$$2x = 60 - 18\tfrac{3}{4} = 41\tfrac{1}{4},$$

$$x = 41\tfrac{1}{4} : 2 = \tfrac{165}{4} : 2,$$

$$= \tfrac{165}{8} = 20\tfrac{5}{8};$$

5) Zur Probe setze man die gefundenen Werthe:

$$x + \frac{y}{2} = 30,$$

$$20\tfrac{5}{8} + 9\tfrac{3}{8} = 30,$$

$$y + \frac{z}{2} = 30,$$

$$18\tfrac{3}{4} + 11\tfrac{1}{4} = 30,$$

$$z + \frac{2y}{5} = 30,$$

$$22\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{5} \times 18\tfrac{3}{4} = 30,$$

$$22\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{5} \times \tfrac{75}{4} = 30,$$

$$22\tfrac{1}{2} + \tfrac{150}{20} = 30,$$

$$22\tfrac{1}{2} + 7\tfrac{1}{2} = 30.$$

III.

Wenn zwei Winkel eines geradlinigten Dreieckes zusammen 44° haben, und ihre Differenz 9° 44' beträgt, wie groß sind dann diese Winkel?

Auflösung durch die Addition und Subtraktion.

1) Es werde der größere dieser Winkel durch C, der kleinere durch B, ihre Summe durch S, und ihre Differenz durch D ausgedrückt, und man erhält folgende zwei Gleichungen:

$$C + B = S,$$
$$C - B = D;$$

2) Man addire beide Gleichungen zu einander, es wird B verschwinden, und C gefunden werden können:

$$\begin{array}{l} C + B = S, \\ C - B = D, \\ \hline 2C = S + D, \end{array}$$

$$C = \frac{S + D}{2} = \tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}D;$$

3) Man subtrahire die zweite Gleichung von der ersten, und es wird C verschwinden, und B zu finden sein:

$$\begin{array}{l} C + B = S, \\ C - B = D, \\ - \quad + \quad\;\; - \\ \hline 2B = S - D, \end{array}$$

$$B = \frac{S - D}{2} = \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}D;$$

4) Dadurch findet man, was ich schon am Ende des §. 15. bemerkte, die nämliche Regel als allgemein giltig erwiesen, die im III. Theile §. 68 vorkömmt, daß nämlich bei der gegebenen Summe und Differenz zweier Zahlen die größere gefunden wird, wenn man zur halben Summe die halbe Differenz addirt, und die kleinere, wenn man von der halben Summe die halbe Differenz subtrahirt.

Man setze nun $^{44}/_{2} = 22^\circ$ anstatt $\frac{1}{2}S$, und $\frac{9^\circ\,14'}{2} = 4^\circ\,37'$ anstatt $\frac{1}{2}D$, und man hat die beiden gesuchten Winkel gefunden:

$$C = \tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}D = 22^\circ + 4^\circ 37' = 26^\circ 37',$$
$$B = \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}D = 22^\circ - 4^\circ\,37' = 17^\circ\,23';$$

5) Bei der angestellten Probe findet man, daß $26^\circ\,37' + 17^\circ\,23' = 44^\circ$, und $26^\circ\,37' - 17^\circ 23' = 9^\circ 14'$; um deßwillen ist die Auflösung richtig.

Anmerkung. Durch Uebung wird man bald auf jene Veränderungen aufmerksam werden, durch die man geschwinder zum vorgesteckten Ziele gelangt, als wenn man gerade zu nach der gewöhnlichen Regel verfährt; um deßwillen habe ich bei der Auflösung der III. Aufgabe die die erste unbekannte Größe durch die Addition, und die zweite durch die Subtraktion gesucht, weil ich dadurch bei diesem Beispiele die letztere geschwinder gefunden habe, als wenn ich anstatt C den gleichen Werth substituirt hätte.

§. 18.

Die Auflösung einiger unbestimmter Gleichungen.

Für die Auflösung unbestimmter Aufgaben, bei welchen aus den gegebenen Bedingungen nicht so viele verschiedene Gleichungen gebildet werden können, als unbekannte Größen vorkommen (III. §. 94. Zus.), mögen im Allgemeinen folgende Vorschriften gelten:

1) Man bezeichne die bekannten Größen mit den ersten, und die unbekannten mit den letzten Buchstaben des Alphabets (III. §. 43);

2) Man bilde aus den Bedingungen so viele verschiedene Gleichungen, als es möglich ist;

3) Man verfahre übrigens, wie bei den bestimmten Gleichungen, um den Werth der unbekannten Größen zu finden: man wird aber zuletzt immer eine solche Gleichung erhalten, in welcher der Werth der gesuchten unbekannten Größe nicht ganz durch bloß unbekannte Größen bestimmt ist;

4) Endlich werden jene unbekannten Größen, die, mit bekannten verbunden, einer anderen allein gefundenen unbekannten gleich sind, nach Willkür als bekannte Zahlen angenommen, indeß aber doch immer so, daß dabei die gegebenen Bedingungen der vorkommenden Aufgabe erfüllt werden.

I. Beispiel:

50 Personen, unter denen Männer, Weiber und Kinder sind, verzehren mit einander 60 fl.; ein Mann zahlt 2 fl., ein Weib 1 fl., und ein Kind ½ fl. Wie viel waren es Männer, Weiber und Kinder?

Auflösung:

1) Die Anzahl der Männer sei $= x$, und die der Weiber $= y$; dann ist die Anzahl der Kinder $z = 50 - (x + y) = 50 - x - y$;

2) Würde man hier die Summe aller Personen gleich 50 setzen, so bekäme man die identische Gleichung $50 - x - y + x + y = 50$, welche nicht benützt werden könnte;

3) Um eine brauchbare Gleichung zu erhalten, drücke man die einzelnen Zahlungen aus (II. §. 74.), und setze sie gleich 60 fl.:

$$2x \dagger y \dagger \frac{50 - x - y}{2} = 60,$$
$$4x \dagger 2y \dagger 50 - x - y = 120,$$
$$3x \dagger y \dagger 50 = 120;$$

4) Hier drücke man nach dem im III. Theile §. 98. aufgestellten Regeln den Werth von x aus:

$$3x \dagger y \dagger 50 = 120,$$
$$3x = 120 - 50 - y,$$
$$3x = 70 - y,$$
$$x = \frac{70 - y}{3} = 23\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}y;$$

5) Man nehme anstatt y eine solche Zahl an, daß bei der Division mit 3 immer 1 als Rest bleibt, und daß man $\frac{1}{3}y$ von $23\frac{1}{3}$ wirklich so abziehen kann, daß als Rest eine positive ganze Zahl bleibt: setzt man nun

1) $y = 1$, so ist $x = 23$, also $z = 26$,
2) $y = 4$, „ „ $x = 22$, „ $z = 24$,
3) $y = 7$, „ „ $x = 21$, „ $z = 22$,
4) $y = 10$, „ „ $x = 20$, „ $z = 20$,
5) $y = 13$, „ „ $x = 19$, „ $z = 18$,
6) $y = 16$, „ „ $x = 18$, „ $z = 16$,
7) $y = 19$, „ „ $x = 17$, „ $z = 14$,
8) $y = 22$, „ „ $x = 16$, „ $z = 12$,
9) $y = 25$, „ „ $x = 15$, „ $z = 10$,
u. s. w.

6) Man mag von den hier ausgesetzten neun Auflösungen, oder von jenen, die durch die verschiedenen Annahmen des Werthes von y noch möglich sind, was immer für Resultate nehmen, so erhält man allemal 60 fl. als die ganze Zeche;

Nimmt man die erste Auflösung, so ist $y = 1$, also $1 \times y = 1$ fl., dann $x = 23$, daher $2x = 46$ fl., endlich $z = 26$, mithin $\frac{1}{2}z = 13$ fl., und $46 \dagger 1 \dagger 13 = 60$.

Nimmt man z. B. die sechste Auflösung, so ist $y = 16$, also $1 \times y = 16$ fl., dann $x = 18$, daher $2x = 36$ fl., endlich $z = 16$, mithin $\frac{1}{2}z = 8$, und $16 \dagger 36 \dagger 8 = 60$.

II. Beispiel:

Hätte man nur die beiden Münzsorten von Siebnern und Siebenzehnern, so könnte man damit, von 1 kr. angefangen, alle Summen von Gulden und Kreutzern bis in's Unendliche bezahlen, ohne die geringste Scheidemünz dabei nöthig zu haben.

Es ist nun die Frage, wie müßte man die Sache bei einer solchen Zahlung angehen?

Auflösung:

1) Ist die zu bezahlende Summe in Gulden gegeben, so reduzire man sie auf Kreutzer (I. §. 90. A.), und setze die Kreutzer-Summe $= a$, die Anzahl der Siebner und Siebenzehner zusammen $= x$, die Anzahl der Siebenzehner allein $= y$; dann ist die Anzahl der Siebner $= x - y$, und man erhält nachstehende Gleichung, in welcher der Werth von y ausgedrückt wird:

$$17y + 7(x - y) = a,$$
$$17y + 7x - 7y = a,$$
$$10y + 7x = a,$$
$$10y = a - 7x,$$
$$y = \frac{a - 7x}{10};$$

2) Wird nun für x eine Zahl gewählt, die durch 7 multiplizirt das nämliche Endziffer bekömmt, das die Kreutzer-Summe hat, so läßt sich die Differenz $a - 7x$ allemal durch 10 ohne Rest theilen, weil jedes Ziffer von sich selbst abgezogen Null gibt: man kann aber bei der Multiplikation mit 7 wirklich alle möglichen Endziffern erhalten, denn

$$\left.\begin{array}{l} 7 \times 3 = 21 \\ 7 \times 6 = 42 \\ 7 \times 9 = 63 \\ 7 \times 2 = 14 \\ 7 \times 5 = 35 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 7 \times 8 = 56 \\ 7 \times 1 = 7 \\ 7 \times 4 = 28 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 7 \times 10 = 70; \end{array}$$

3) Es sollen z. B. auf diese Weise 3 fl. 48 kr., somit 228 kr. bezahlt werden, so erhält man hier nach der allgemeinen Formel, weil $a = 3$ fl. 48 kr.:

$$y = \frac{a - 7x}{10},$$

$$y = \frac{228 - 7x}{10};$$

Man kann nun anstatt x entweder 4, oder 14, oder 24 ꝛc. annehmen; im ersten Falle ist $y = \frac{228 - 7 \times 4}{10} = {}^{200}/_{10} = 20$, und $x - y = 4 - 20 = -16$, d. h., wenn man 20 Siebenzehner hingibt, so erhält man 16 Siebner zurück, und man hat dadurch auf die verlangte Weise die 3 fl. 48 kr. bezahlt; indem $17 \times 20 = 340$, dann $7 \times 16 = 112$, also $340 - 112 = 228$ kr. $= 3$ fl. 48 kr., und zugleich $20 + (-16) = 20 - 16 = 4$.

Nimmt man $x = 24$, so ist $y = \frac{228 - 7 \times 24}{10} = \frac{228 - 168}{10} = {}^{60}/_{10} = 6$, und $x - y = 24 - 6 = 18$, d. h., man muß 6 Siebenzehner, und 18 Siebner hingeben, um damit 3 fl. 48 kr. zu zahlen, da $17 \times 6 + 7 \times 18 = 102 + 126 = 228$ kr. $= 3$ fl. 48 kr.

III. Beispiel:

Man soll eine Zahl finden, die mit 6 dividirt 5, mit 13 dividirt 10, und mit 20 dividirt 13 zum Reste gibt.

Auflösung:

1) Subtrahirt man 5 von dieser Zahl, die man mit x ausdrückt, so erhält man bei der Division genau eine ganze Zahl, die man mit a bezeichnen kann, daher ist $\frac{x - 5}{6} = a$:

2) Man drücke hier den Werth von x aus, und setze ihn anstatt x bei der Division mit 13, wo der Quotient gleich b gesetzt wird:

$$\frac{x - 5}{6} = a,$$

$$x = 6a + 5,$$

$$\frac{x - 10}{13} = b,$$

$$\frac{6a + 5 - 10}{13} = \frac{6a - 5}{13} = b;$$

3) Hier drücke man den Werth von a aus:

$$\frac{6a - 5}{13} = b,$$

$$6a - 5 = 13b,$$

$$a = \frac{13b + 5}{6} = 2b + \frac{b + 5}{6};$$

4) $\frac{b + 5}{6}$ muß eine ganze Zahl sein, daher setze man

$$\frac{b + 5}{6} = c,$$

$$b = 6c - 5;$$

5) Man substituire zurück anstatt b den gleichen Werth bei Nro. 3:

$$a = 2(6c - 5) + \frac{6c + 5 - 5}{6}$$

$$= 12c - 10 + c = 13c - 10;$$

6) Man substituire bei Nro. 2 anstatt a:

$$x = 6(13c - 10) + 5$$

$$= 78c - 60 + 5 = 78c - 55;$$

7) Nach der dritten Bedingung setze man im Ausdrucke $\frac{x - 13}{20}$ den jetzt gefundenen gleichen Werth von x:

$$\frac{x - 13}{20} = \frac{78c - 55 - 13}{20}$$

$$= \frac{78c - 68}{20} = 3c - 3 + \frac{18c - 8}{20};$$

8) $\frac{18c - 8}{20} = \frac{9c - 4}{10}$ muß eine ganze Zahl sein; daher setze man diesen Ausdruck $= d$, es ist dann

$$\frac{9c - 4}{10} = d,$$
$$9c - 4 = 10d,$$
$$c = \frac{10d + 4}{9} = d + \frac{d + 4}{9};$$

9) Endlich $\frac{d + 4}{9}$ ist auch eine ganze Zahl, und kann gleich y gesetzt werden:

$$\frac{d + 4}{9} = y,$$
$$d = 9y - 4;$$

10) Man substituire bei Nro. 8 anstatt d den gleichen Werth, und bei Nro. 6 anstatt c den gefundenen Werth:

$$d = 9y - 4,$$
$$c = d + \frac{d + 4}{9},$$
$$c = 9y - 4 + \frac{9y - 4 + 4}{9},$$
$$= 9y - 4 + y = 10y - 4,$$

$$x = 78c - 55$$
$$x = 78(10y - 4) - 55$$
$$= 780y - 312 - 55$$
$$= 780y - 367;$$

11) Setzet man $y = 1$, so ist $x = 780 \times 1 - 367 = 780 - 367 = 413$, und 413 mit 6 dividirt gibt 5, mit 13 dividirt 10, und endlich mit 20 dividirt 13 zum Rest;

12) Nimmt man an, y sei $= 2$, so erhält man 1193, weil dann $x = 780 \times 2 - 367 = 1560 - 367 = 1193$, und diese Zahl ist ebenfalls auf die vorige Weise theilbar;

Auf eine ähnliche Weise, wenn man $y = 3$, dann

dann $y = 4$ rc. setzet, wird man immer x in größeren Zahlen ausgedrückt finden, welche den hier gegebenen Bedingungen gemäß theilbar sind.

Indeß werden aber bei solchen Aufgaben mehrentheils die Grenzzahlen angegeben, zwischen welchen die gesuchte Zahl liegt, weil sonst die Aufgabe gar zu unbestimmt wäre, und zu viele Zahlen als die gesuchten angegeben werden könnten.

Anmerkung: 1) Die Auflösung der II. Aufgabe, die Bezahlung mit Siebnern und Siebenzehnern betreffend, findet man in Prändels Algebra §. 133. c. München 1795. in Absicht auf die dabei vorkommenden verschiedenen Fälle ausführlich vorgetragen. In Beda Mayrs Anfangsgründen der Algebra Augsburg 1792. kömmt das nämliche Problem vor, welches da auf eine ähnliche, aber nicht so bequeme Weise, aufgelöset wird.

2) Aus der vorstehenden Auflösung des III. Beispieles ergeben sich folgende Bemerkungen:

a) Man muß die unbekannte Zahl, welche durch die Aufgabe gesucht wird, auf die nämliche Weise ausdrücken, und die Quotienten, welche ganze Zahlen sind, immer mit neuen Buchstaben bezeichnen;

b) Anstatt der unbekannten Größe setzet man allemal jenen Ausdruck, wo die Gestalt des Bruches nicht mehr vorkömmt;

c) Jeden Bruch bringt man auf den reinsten Ausdruck, bleibt wieder ein Bruch, so setzt man ihn gleich einem neuen Buchstaben, jener beträgt ein Ganzes, weil sonst der ganze Ausdruck kein Ganzes sein könnte;

d) Man setzet das Verfahren so lange fort, bis man durch Substitution mittels der Verbindung aller anfangs gegebenen Ausdrücke einen Ausdruck hat, wo kein Bruch mehr ist; hierauf nimmt man in der zweiten Seite der Gleichung anstatt y ganze Zahlen an, und vergleicht die Resultate mit den Bedingungen.

II. Abschnitt.

Von der Auflösung der quadratischen Gleichungen.

§. 19.
Erklärungen.

a) Eine zusammengesetzte, oder höhere Gleichung (III. §. 94. B.) heißt **rein** (Aequatio pura), wenn darin die unbekannte Größe nur in einer Potenz vorkömmt.

So ist z. B. $x^2 + b = q$ eine **reine quadratische Gleichung**, weil die unbekannte Größe x nur in der zweiten Dignität vorkömmt.

b) Eine höhere Gleichung heißt **unrein** oder **gemischt** (Aequatio adfecta), wenn in ihr die unbekannte Größe mit verschiedenen Exponenten vorkömmt.

Daher ist z. B. $x^2 + px = q$ eine **gemischte, unreine quadratische Gleichung**, weil nebst dem Quadrate von x oder x^2 auch x mit dem Exponenten 1 vorkömmt.

§. 20.
Aufgabe, jede bestimmte reine quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung:

1) Man verfahre ganz, wie bei einfachen Gleichungen mit einer unbekannten Größe, nach den im III. Theile §. 98. aufgestellten Regeln, um das Quadrat der unbekannten Größe ganz allein auf eine Seite mit dem Zeichen + und dem Koeffizienten 1 zu bringen;

2) Sobald dieses geschehen ist, ziehe man auf

beiden Seiten die Quadratwurzel nach den im III. Theile aufgestellten Regeln, oder nach den in diesem Theile §. 2. gegebenen Vorschriften aus, und gebe der gefundenen Wurzel die Zeichen $\pm$, weil eine solche Gleichung zwei einander gleiche, aber entgegengesetzte Werthe oder Wurzeln hat (III. §. 73. Zus. I.);

3) Kann man die Wurzel nicht wirklich ausziehen, so setze man das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ mit dem doppelten Zeichen $\pm$ dem Ausdrucke vor, und klammere ihn ein, wenn er eine mehrgliederigte Größe ist;

4) Die Probe wird bei diesen Gleichungen, und bei den gemischten quadratischen Gleichungen eben so gemacht, wie bei den einfachen Gleichungen.

I. Beispiel:

Es sei diese Gleichung gegeben „$\frac{ax^2}{b} + c = q$."

Auflösung:

$$\frac{ax^2}{b} + c = q,$$
$$ax^2 + bc = bq,$$
$$ax^2 = bq - bc,$$
$$x^2 = \frac{bq - bc}{a},$$
$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{bq - bc}{a}\right)},$$

Probe:

Es ist $x^2 = \left(\pm\sqrt{\left(\frac{bq - bc}{a}\right)}\right)^2 = \frac{bq - bc}{a}$,

und also $a\left(\frac{bq - bc}{a}\right) : b + c = q$,

$$\frac{bq - bc}{b} + c = q,$$

$$q - c + c = q.$$

II. Beispiel:

Es sei die Gleichung gegeben „$3x^2 - 16 = 176$."

Auflösung:

$$3x^2 - 16 = 176,$$
$$3x^2 = 176 + 16 = 192,$$
$$x^2 = {}^{192}/_3 = 64,$$
$$x = \pm \sqrt{64} = \pm 8.$$

Probe:

Es ist $(\pm 8)^2 = 64$, und also $3 \times 64 - 16 = 192 - 16 = 176$.

§. 21.

Aufgabe, jede bestimmte gemischte quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung:

Die Auflösung solcher Gleichungen beruht auf folgenden vier Stücken:

1) Man ordne die quadratische Gleichung, d. h., man verändere sie, ohne die Gleichheit der Ausdrücke aufzuheben, so lange, bis das Quadrat der unbekannten Größe zur linken Seite an der ersten Stelle ohne Koeffizienten mit dem Zeichen +, und die nächst niedere Potenz dieser Größe mit der Summe ihrer Koeffizienten an der zweiten Stelle der ersten Seite der Gleichung steht, wäh-

rend alle bekannten Größen auf die andere Seite hinübergeschafft werden;

2) Man ziehe auf der ersten Seite, wo das Quadrat und die erste Potenz der unbekannten Größe mit der Summe ihrer Koeffizienten steht, nach §. 2. die Quadratwurzel aus; man wird bemerken, daß man allemal ein unvollkommenes Quadrat hat (§. 1. Zus. III.), weil das Quadrat einer zweigliederigten Größe drei Glieder hat (§. 1.), und das Quadrat des zweiten Wurzeltheiles fehlt: um dieses zu finden, nehme man jederzeit die Summe der Koeffizienten von x halb, und erhebe diese halbe Summe zum Quadrate, das dann auf beiden Seiten addirt wird (I. §. 25. I.), um das Quadrat zu ergänzen oder vollkommen zu machen;

3) Man ziehe auf beiden Seiten die Quadratwurzel nach den im §. 2., und den im III. Theile aufgestellten Regeln aus;

4) Endlich transponire man das auf der linken Seite beim Ausziehen der Wurzel gefundene bekannte Glied (III. §. 96. Zus. I.), und man hat dadurch x gefunden;

Der Wurzel gebe man aus dem im vorigen §. angeführten Grunde das zweifache Zeichen $\pm$, und man behalte das Wurzelzeichen bei, wo die genaue Ausziehung der Wurzel nicht angeht, oder ziehe sie da auf dem Wege der Annäherung aus, was aber nur auf der zweiten Seite der Fall sein kann, weil auf der ersten Seite nach der vorgeschriebenen Verfahrungsweise immer ein vollkommenes Quadrat hergestellt wird.

I. Beispiel:

Es sei die Gleichung gegeben „$x^2 = q - px$."

Auflösung:

1) Man ordne die Gleichung:

$$x^2 = q - px,$$
$$x^2 + px = q;$$

2) Man ziehe aus $x^2 + px$ die Quadratwurzel aus, und ergänze das unvollständige Quadrat:

$$\sqrt{x^2 + px} \,(\, x + \tfrac{1}{2}p$$
$$x^2$$
$$-$$
$$\overline{}$$
$$px$$
$$2x + \tfrac{1}{2}p$$
$$px + \tfrac{1}{4}p^2$$
$$- \quad -$$
$$\overline{}$$
$$- \tfrac{1}{4}p^2$$

Man sieht offenbar, daß das Quadrat des zweiten Theiles oder $\frac{1}{4}p^2$ fehlt, dieses addire man auf beiden Seiten:

$$x^2 + px = q$$
$$\tfrac{1}{4}p^2 = \tfrac{1}{4}p^2$$
$$\overline{x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 = q + \tfrac{1}{4}p^2;}$$

3) Man ziehe auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, auf der ersten Seite ist sie aus Nro. 2. schon bekannt:

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 = q + \tfrac{1}{4}p^2,$$
$$\sqrt{(x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2)} = \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)},$$
$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)};$$

4) Man transponire $\frac{1}{2}p$, und gebe durch Einrichtung des Bruches, und durch die Ausziehung der Wurzel aus dem Nenner dem zweiten Ausdrucke eine bequemere Form:

$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)}$$
$$x = - \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)}$$
$$= - \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{4q + p^2}{4}\right)}$$

$$= -\tfrac{1}{2}p \pm \frac{\sqrt{(4q + p^2)}}{2}$$

$$= \frac{-p \pm \sqrt{(4q + p^2)}}{2}.$$

Probe:

$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)}$, also
$px = -\tfrac{1}{2}p^2 \pm p\sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)}$, und
$x^2 = \tfrac{1}{4}p^2 \mp p\sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)} + q + \tfrac{1}{4}p^2$, mithin

$x^2 + px = -\tfrac{1}{4}p^2 + q + \tfrac{1}{4}p^2 = q.$

II. Beispiel:

Es sei diese Gleichung gegeben „$x^2 - 90 = \tfrac{9}{2}x$."

I. Auflösung:

1) Man ordne die Gleichung:

$$x^2 - 90 = \tfrac{9}{2}x,$$
$$x^2 - \tfrac{9}{2}x = 90;$$

2) Man ergänze das Quadrat:

$$\sqrt{x^2 - \tfrac{9}{2}x} \;\}\; x - \tfrac{9}{4}$$
$$x^2$$
$$-$$
$$\overline{\quad - \tfrac{9}{2}x \quad}$$
$$2x - \tfrac{9}{4}$$
$$- \tfrac{9}{2}x + \tfrac{81}{16}$$
$$+ \quad -$$
$$\overline{\quad - \tfrac{81}{16} \quad}$$

$$x^2 - \tfrac{9}{2}x + \tfrac{81}{16} = 90 + \tfrac{81}{16} = \tfrac{1521}{16};$$

3) Man ziehe auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus:

$$x^2 - \tfrac{9}{2}x + \tfrac{81}{16} = \tfrac{1521}{16},$$
$$\sqrt{(x^2 - \tfrac{9}{2}x + \tfrac{81}{16})} = \sqrt{\tfrac{1521}{16}},$$
$$x - \tfrac{9}{4} = \pm \tfrac{39}{4};$$

4) Man transponire $\frac{9}{4}$:

$$x - \tfrac{9}{4} = \pm \tfrac{39}{4},$$

$$x = \tfrac{9}{4} \pm \tfrac{39}{4} = 2\tfrac{1}{4} \pm 9\tfrac{3}{4};$$

P r o b e:

a) Nimmt man die positive Wurzel, so ist $x = 2\frac{1}{4} + 9\frac{3}{4} = 12$, also

$$x^2 - 90 = \tfrac{9}{2}x,$$

$$12^2 - 90 = \tfrac{9}{2} \times 12,$$

$$144 - 90 = 54,$$

$$54 = 54;$$

b) Nimmt man die negative Wurzel, so ist $x = 2\frac{1}{4} - 9\frac{3}{4} = -7\frac{1}{2} = -\frac{15}{2}$, also

$$x^2 - 90 = \tfrac{9}{2} \times x$$

$$(-\tfrac{15}{2})^2 - 90 = \tfrac{9}{2} \times -\tfrac{15}{2},$$

$$\tfrac{225}{4} - 90 = -\tfrac{135}{4},$$

$$56\tfrac{1}{4} - 90 = -33\tfrac{3}{4},$$

$$-33\tfrac{3}{4} = -33\tfrac{3}{4}.$$

II. A u f l ö s u n g:

1) Jede quadratische Gleichung läßt sich in dem im §. 21. Nro. 1. angegebenen Sinne ordnen, und die unbekannte Größe kann allgemein durch x, ihr Quadrat durch x^2, die Summe der Koeffizienten von x durch p, und die Summe aller gegebenen Größen durch q ausgedrückt werden, daher ist jede bestimmte gemischte quadratische Gleichung durch $x^2 + px = q$ ausgedrückt;

2) Hier ist nach der vorhin gemachten Auflösung

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{(4q + p^2)}}{2};$$

3) Subsumirt man die einzelnen Werthe, und setzet man somit in der geordneten Gleichung $-\frac{9}{2}$ anstatt p, und 90 anstatt q, so ist

$$x = \frac{\tfrac{9}{2} \pm \sqrt{(360 + \tfrac{81}{4})}}{2},$$

$$x = \frac{9/2 \pm \sqrt{(1521/4)}}{2},$$

$$x = \frac{9/2 \pm 39/2}{2} = 9/4 \pm 39/4,$$

$$x = 2\,1/4 + 9\,3/4.$$

III. Beispiel:

Es sei nachstehende Gleichung gegeben, in welcher n die unbekannte Größe ausdrückt „$2an + dn^2 - dn = S$.“

Auflösung:

1) Man ordne die Gleichung:

$$2an + dn^2 - dn = 2S,$$

$$dn^2 + 2an - dn = 2S,$$

$$dn^2 + (2a - d)\,n = 2S,$$

$$n^2 + \left(\frac{2a - d}{d}\right) n = \frac{2S}{d};$$

2) Man stelle auf der linken Seite ein vollständiges Quadrat her, indem man das Quadrat von der Hälfte des Koeffizienten von n auf beiden Seiten addirt:

$$n^2 + \left(\frac{2a - d}{d}\right) n = \frac{2S}{d},$$

$$n^2 + \left(\frac{2a - d}{d}\right) n + \frac{4a^2 - 4ad + d^2}{4d^2} = \frac{2S}{d} + \frac{4a^2 - 4ad + d^2}{4d^2};$$

3) Man ziehe auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, wodurch man folgende Gleichung erhält:

$$n + \frac{2a - d}{2d} = \pm \sqrt{\left(\frac{2S}{d} + \frac{4a^2 - 4ad + d^2}{4d^2}\right)};$$

4) Man transponire, und gebe dem Ausdrucke eine einfachere Form, man findet, daß

$$n = -\left(\frac{2a - d}{2d}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2S}{d} + \frac{4a^2 - 4ad + d^2}{4d^2}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{2S}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \tfrac{1}{4}\right)}.$$

Anmerkung: Weil $x^2 + px = q$ alle bestimmte gemischte quadratische Gleichungen ausdrückt, so hat man im ersten Beispiele eine Auflösung, nach der alle möglichen Gleichungen dieser Art ohne die spezielle Ansführung aufgelöset werden können, wenn man anstatt p die Summe der Koeffizienten von x, und anstatt q die Summe der gegebenen Größen substituirt, wie ich es bei der II. Auflösung des II. Beispieles gethan habe.

§. 22.

Beispiele zur Uebung.

I.

Eine Mutter wurde einst gefragt, wie alt sie, und ihre Tochter sei. Sie gab zur Antwort: Als ich meine Tochter gebar, war ich 24 Jahr alt; wenn man nun mein jetziges Alter mit dem meiner Tochter multiplizirt, so erhält man die Zahl 756.

Es ist nun die Frage, wie alt war die Mutter, und wie alt die Tochter?

Auflösung:

1) Das Alter der Tochter sei gleich x, so ist das der Mutter $= 24 + x$;

2) Multiplizirt man x mit $24 + x$, so erhält $24x + x^2$, und man bekömmt folgende Gleichung:

$$24x + x^2 = 756;$$

3) Man ordne die Gleichung, ergänze das Quadrat, ziehe die Wurzel aus, und transponire:

$$24x + x^2 = 756,$$

$$x^2 + 24x = 756,$$

$$x^2 + 24x + 12^2 = 756 + 12^2,$$

$$x^2 + 24x + 144 = 756 + 144 = 900,$$

$$\sqrt{(x^2 + 24x + 144)} = \sqrt{900},$$

$$x + 12 = \pm 30,$$

$$x = \pm 30 - 12;$$

4) Nimmt man, wie es diese Aufgabe erfodert, die positive Wurzel, so ist x = 30 — 12 = 18;

5) Es war also die Tochter 18 Jahr alt, und das Alter der Mutter (24 † x) war = 24 † 18 = 42 Jahren.

Probe:

Das Alter der Mutter war = 42, und das der Tochter = 18; beide Zahlen mit einander multiplizirt geben wirklich zum Produkte die Zahl 756, indem 42 × 18 = 756.

II.

Ein Mathematiker besann sich einst vergebens auf das Jahr, in welchem von Franz Vieta die Buchstabenrechnung sollte erfunden worden sein. Ein Unbekannter schrieb ihm die Zahl 2529690 auf den Tisch mit dem Beisatze hin „Pronik der Jahreszahl." Es hießen aber die alten Mathematiker die Summe aus dem Quadrate und der Wurzel eine Pronikzahl. Wie kann nun hier aus der gegebenen Pronik die Jahrszahl gefunden werden?

Auflösung:

1) Es heiße die Jahrszahl x, so ist das Quadrat davon = x^2, und deßhalb die Pronikzahl = $x^2 † x$;

2) Man erhält nachstehende Gleichung, in welcher die bekannten Veränderungen vorgenommen werden, um x zu finden:

$$x^2 † x = 2529690,$$
$$x^2 † x † {}^1\!/_4 = 2529690 † {}^1\!/_4$$
$$x^2 † x † {}^1\!/_4 = {}^{10118761}\!/_4,$$
$$\sqrt{(x^2 † x † {}^1\!/_4)} = \sqrt{{}^{10118761}\!/_4},$$
$$x † {}^1\!/_2 = \pm {}^{3181}\!/_2,$$
$$x = \pm {}^{3181}\!/_2 - {}^1\!/_2;$$

3) Nimmt man die positive Wurzel, so ist
$x = {}^{3181}\!/_2 - {}^1\!/_2 = 1590\,{}^1\!/_2 - {}^1\!/_2 = 1590.$

Probe:

$$x = 1590$$
$$x^2 \dagger 2528100$$
$$x^2 \dagger x = 2529690.$$

III.

In dem Magazin für Gedächtnißübungen und Deklamation in Schulen (Kempten 1814. bei Herrn Joseph Kösel, in Duodez 216 Seiten, Preis 18 kr.), womit uns der würdige, durch seine vortrefflichen Werke rühmlich bekannte Herr Professor Andreas Kammerer beschenkte, findet man auf Seite 139 u. 140 das nachstehende niedliche algebraische Räthsel, welches den 17. Juli 1813 im 170. Stücke des Morgenblattes erschienen war.

Die Tauben-Verkäuferinn und die Rechnerinn.

Zehn Gulden sollst du für die Tauben bringen.
Nun trage sie zu Markt. Richt's mit dem Preis wohl ein,
Und will dir's etwa ja nicht ganz gelingen,
So mögen's weniger — sechs Batzen sein!
Doch minder nicht! — Hörst du's? Nun, Dorchen, laufe,
Daß du zum Sitz noch kömmst! Du kennst ihn schon! —

Das Mädchen läuft, und sinnt, wie sie das Heer verkaufe,
Und sinnt! — — und drüber flog ein Paar davon.
Weh mir! weint Dorchen, ach, wie wird mir's gehen?
Da setz' ich im Verkauf nun einen Rest!
Ich kann die Frau schon drob im Zorne sehen,
Und weiß, daß sie mir keinen Deut erläßt.

Den Jammer hört ein Mädchen in der Nähe,
Das klüger ist, und trefflich rechnen kann.
Die sagt: mein Kind, warum denn Ach und Wehe?
Da läßt sich helfen; nimm doch Rath nur an.
Auf jede Taube mußt du noch vier Kreutzer schlagen;
Der Tauben auf dem Markt sind heut nicht viel:
Der Draufschlag läßt sich diesmal sicher wagen,
So kommst gewiß du beim Verkauf zum Ziel.

Das Mädchen wagt's, und steigert so die Preise,
Und — Dictum, Factum! der Erlös ist da!
Neun Gulden und neun Batzen sind's, beweise
Mit schöner Eins die Kunst der Algebra! —

Wie das so paßte, möchtet gern ihr wissen?
Wie kam die Summe so geschickt herein?
Wie viel hat Tauben sie verkaufen müssen?
Wie mag der Preis für's Stück gewesen sein?
Das kannst du tappend wohl empirisch finden!
Doch wer's versteht, fährt nicht so hin und her;
Der stellt die Gleichung auf nach festen Gründen,
Und löset sie. — Das Kunststück hält nicht schwer!

Auflösung:

1) Man reduzire die Gulden und Batzen auf Kreutzer, und setze diese 9 fl. 9 Batz. oder 576 kr. $= a$, und die Anzahl der anfangs da gewesenen Tauben $= x$, somit die der nachherigen $= x - 2$;

2) Hätte sie alle Tauben verkauft, so wäre der Preis für eine Taube gleich $a : x$ oder $\frac{a}{x}$ gewesen, nun war er aber, da zwei davon flogen, gleich $\frac{a}{x-2}$ (II. §. 74.);

3) Das Mädchen hat deßhalb den Preis um 4 kr. für das Stück gesteigert, man erhält also folgende Gleichung:

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{x-2} - 4;$$

4) Hier hebe man die Brüche auf, ordne die Gleichung, ergänze das Quadrat, ziehe die Wurzel aus, und transponire:

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{x-2} - 4,$$

$$a = \frac{ax}{x-2} - 4x,$$

$$ax - 2a = ax - 4x^2 + 8x,$$

$$4x^2 - 8x + ax - ax = 2a,$$

$$4x^2 - 8x = 2a,$$

$$x^2 - 2x = \tfrac{2}{4}a = \tfrac{1}{2}a,$$

$$x^2 - 2x + 1 = \tfrac{1}{2}a + 1,$$

$$\sqrt{(x^2 - 2x + 1)} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a + 1)},$$

$$x - 1 = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a + 1)}$$

$$x = 1 + \sqrt{(\tfrac{1}{2}a + 1)};$$

5) Weil $a = 576$, so ist $\frac{1}{2}a = 288$, also $\frac{1}{2}a + 1 = 289$, ferner $\sqrt{289} = 17$, daher ist $x = 1 + 17 = 18$, und $x - 2 = 16$, d. h., sie hatte anfangs 18 Tauben, und hat somit noch 16 verkauft.

6) Alle Tauben gaben zusammen den Erlös von 9 fl. 9 Batz. = 576 kr.; es hätte also eine Taube anfangs 32 kr. gekostet, und nachher wurde das Stück um 36 kr. hingegeben, indem $576 : 18 = 32$, und $576 : 16 = 36$.

Probe:

1) Wenn eine Taube 32 kr. kostet, dann kosten 18 Tauben 576 kr., und wenn eine 36 kr. kostet, so erhält man für 16 Tauben auch wieder 576 kr. = 9 Gulden 9 Batzen (II. §. 74.), man hat also in beiden Fällen den nämlichen Erlös;

2) Das Stück ist beim Werthe von 36 kr. um 4 kr. gesteigert worden, da $36 = 32 + 4$;

3) Setzet man die gefundenen Zahlen anstatt x und $x - 2$ in der Gleichung, so hat man ganz gleiche Ausdrücke:

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{x-2} - 4,$$

$$\frac{576}{18} = \frac{576}{16} - 4 = 32.$$

Anmerkung: 1) Diese III. Aufgabe könnte auch, wie ich es schon im II. Theile §. 84. in der beigefügten Anmerkung bemerkte, durch zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Größen aufgelöset werden, bei denen man zuletzt auch wieder die gemischte quadratische Gleichung $x^2 - 2x = \frac{a}{2}$ erhielte. Einer meiner vorzüglichsten Schüler, Herr Karl Flacho, machte die nämliche Auflösung, die ich hier niederschrieb, und welche ganz mit der darauf den 24. Juli 1813 im Morgenblatte Nro. 176. eingerückten übereinstimmte.

2) Bei der Auflösung dieser Aufgabe zeigte ich absichtlich die negative Quadratwurzel nicht mehr an, weil dieselbe bei Aufgaben dieser Art keinen Sinn hat, und dabei der negative Werth als die gesuchte Zahl nicht angenommen werden kann.

3) Die reinen kubischen Gleichungen, und jene gemischten kubischen Gleichungen, bei denen nach dem im §. 8. aufgestellten allgemeinen Kubirungsgesetze der Ku-

bus durch die Hinzufügung des fehlenden vierten Gliedes vollkommen gemacht werden kann, werden nach den im §. 20 u. 21. angegebenen Regeln wie die quadratischen Gleichungen, mit dem einzigen Unterschiede, aufgelöset, daß man bei den kubischen Gleichungen anstatt der Quadratwurzel die Kubikwurzel auszieht, während man bei den gemischten den Kubus dadurch ergänzt oder vollkommen macht, daß man den Koeffizienten des zweiten Gliedes von x^2 mit 3 dividirt, dieses Drittel kubirt, und auf beiden Seiten addirt.

Kömmt z. B. die geordnete Gleichung $x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x = a$ vor, so hat $-x^2$ den Koeffizienten -1; man erhebe $-\frac{1}{3}$ zum Kubus (III. §. 72. u. §. 73.), man erhält die Kubikzahl $-\frac{1}{27}$, welche zur Ergänzung auf beiden Seiten addirt wird.

Dadurch bekömmt man die Gleichung $x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} = a - \frac{1}{27}$; ziehet man auf beiden Seiten die Kubikwurzel nach den in diesem und im III. Theile aufgestellten Regeln aus, so erhält man die Gleichung $x - \frac{1}{3} = \sqrt[3]{(a - \frac{1}{27})} = \sqrt[3]{\left(\frac{27a - 1}{27}\right)}$ $= \frac{\sqrt[3]{(27a - 1)}}{3}$, wo x gefunden wird, wenn man $-\frac{1}{3}$ transponirt, es ist also $x = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt[3]{(27a - 1)}}{3}$.

4) Die reinen höheren Gleichungen (III. §. 94. B. b.), wo x nur in einer Potenz vorkömmt, werden nach §. 20. wie die reinen quadratischen behandelt; man bringt nämlich die unbekannte Größe ganz allein mit dem Zeichen + ohne Koeffizienten auf eine Seite, und zieht dann die durch den Exponenten angezeigte Wurzel auf beiden Seiten aus; wie das Ausziehen der Wurzel vom höheren, als zweiten und dritten Grade, geschieht, ist in Absicht auf jene Seite, wo x steht, schon bekannt (III. §. 78. Zus. I.), und hinsichtlich der auf der andern Seite vorkommenden bekannten Größen wird es bei der Lehre von den Logarithmen gezeigt werden. Auf die verschiedenen Werthe oder Wurzeln, die x bei den höheren Gleichungen haben kann, wird hier noch nicht gesehen.

5) Die unbestimmten quadratischen Gleichungen werden auf eine ähnliche Weise, wie die einfachen unbestimmten Gleichungen, nach den Regeln des §. 18. behandelt.

III. Hauptstück.

Von den arithmetischen und geometrischen Verhältnissen, Proportionen und Progressionen.

I. Abschnitt.

Von den arithmetischen Verhältnissen und Proportionen.

I.

Von den arithmetischen Verhältnissen.

§. 23.

Lehrsatz:

Jedes arithmetische Verhältniß ist unter nachstehender Formel enthalten:

$$a - a + d.$$

Beweis:

1) Beim arithmetischen Verhältnisse werden zwei Zahlen in Absicht auf ihre Differenz mit einander verglichen, man untersucht nämlich dabei, um wie viel eine Zahl kleiner oder größer ist, als die andere (II. §. 47. a);

2) Jedes Vorderglied kann durch a, und jedes Hinterglied durch b, somit jedes arithmetische Verhältniß durch a — b ausgedrückt werden (II. §. 48. a, b und e);

3)

3) In der Buchstabenrechnung kann man auch die größere Zahl von der kleinern subtrahiren (III. §. 50. Zus. II.), man erhält daher beim zu- und abnehmenden Verhältnisse allemal dadurch den Exponenten oder Verhältnißzeiger, daß man das Vorderglied vom Hintergliede subtrahirt (II. §. 48. c. u. d.), wo dann die gefundene Differenz oder der Exponent beim zunehmenden Verhältnisse positiv, und beim abnehmenden negativ ist (II. §. 49. e.);

4) Drückt man den Exponenten, er mag eine positive oder negative Zahl sein, allgemein durch d aus, so ist $b - a = d$, und somit, wenn man a transponirt (III. §. 96. Zus. I.), $b = a + d$;

5) Wird endlich im Verhältnisse $a - b$ anstatt b der gleiche Ausdruck $a + d$ gesetzt, so so erhält man $a - a + d$ als die allgemein giltige Formel für alle arithmethische Verhältnisse.

Zusatz: Man erhält, im Falle das erste Glied und der Exponent des arithmetischen Verhältnisses gegeben ist, allemal dadurch das Hinterglied, daß man den Exponenten zum Vordergliede addirt.

Ist z. B. das Vorderglied oder $a = 4$, und der Exponent oder $d = 5$, so ist $b = a + d = 4 + 5 = 9$, und man hat das zunehmende arithmetische Verhältniß $4 - 9$; ist aber z. B. das Vorderglied $a = 6$, und der Exponent $d = -4$, so ist $b = 6 + (-4) = 6 - 4 = 2$, und man hat das abnehmende arithmetische Verhältniß $6 - 2$.

Anmerkung: Die benöthigten Erklärungen in Absicht auf die arithmetischen und geometrischen Verhältnisse und Proportionen kommen schon im II. Theile dieses Lehrbuches im I. Abschnitte des II. Hauptstückes in den §§. 47, 48, 51 und 52. vor, während in diesem nämlichen Abschnitte in den §§. 49 und 50. einige Eigenschaften der arithmetischen und geometrischen Verhältnisse angegeben sind; um deßwillen führe ich diese Eigenschaften und jene Erklärungen hier nicht mehr an.

II.

Von den arithmetischen Proportionen.

§. 24.

Lehrsatz:

Jede arithmetische Proportion läßt sich durch nachstehende Formel ausdrücken:
$$a - a + d = b - b + d.$$

Beweis:

1) Zwei gleiche arithmetische Verhältnisse geben, mit einander verglichen, eine arithmetische Proportion (II. §. 51.);

2) Man bezeichne die beiden Vorderglieder einer jeden solchen Proportion mit a und b, und den Exponenten oder Unterschied, der in beiden Verhältnissen der nämliche ist (II. §. 49. b.), mit d;

3) Man erhält allemal das Hinterglied, wenn man zum Vordergliede den Exponenten addirt (§. 23. Zus.); es ist also das Hinterglied des ersten Verhältnisses gleich $a + d$, und das des zweiten Verhältnisses gleich $b + d$, und daher das erste Verhältniß einer solchen Proportion allgemein durch $a - a + d$, und das zweite durch $b - b + d$ ausgedrückt;

4) Diese beiden Verhältnisse sind gleich, weil $(a + d) - a = d$, und $(b + d) - b = d$; daher ist durch $a - a + d = b - b + d$ allgemein jede arithmetische Proportion ausgedrückt.

Ist z. B. $a = 5$, dann $b = 6$, und $d = 4$, so ist $a + d = 5 + 4 = 9$, ferner $b + d = 6 + 4 = 10$, und man hat die arithmetische Proportion $5 - (5 + 4) = 6 - (6 + 4)$, oder $5 - 9 = 6 - 10$.

1. Zusatz: Jede stätige arithmetische Proportion kann durch diese Formel ausgedrückt werden „$a - a + d = a + d - a + 2d$“, oder kürzer durch $a - a + d - a + 2d$; indem das mittlere Glied $a + d$, welches zugleich Hinterglied des ersten Ver-

hältnisses, und Vorderglied des zweiten Verhältnisses ist, nur einmal geschrieben wird.

In der stättigen Proportion müssen die beiden mittleren Glieder a † d und b einander gleich sein (II. §. 52. d.); setzet man nun, oder substituirt man in der allgemein giltigen Formel anstatt b den gleichen Ausdruck a † d, so erhält man die angegebene Formel für jede stättige arithmetische Proportion, wie aus Folgendem ersichtlich ist:

$$a - a + d = b - b + d,$$
$$b = a + d, \text{ also}$$

$$a - a + d = a + d - (a + d) + d,$$
$$a - a + d = a + d - a + 2d,$$
$$a - a + d - a + 2d.$$

Ist z. B. a = 4, und d = 3, so ist a † d = 4 † 3 = 7, und a † 2d = 4 † 2 × 3 = 4 † 6 = 10; um deßwillen erhält man diese stättige arithmetische Proportion 4 — (4 † 3) — (4 † 6), oder 4 — 7 — 10.

II. Zusatz: In jeder dißkreten arithmetischen Proportion (II. §. 52. d.) ist die Summe der äußeren Glieder der Summe der mittleren Glieder gleich, weil jede solche Proportion ausgedrückt ist durch a — a † d = b — b † d, und hier a † b † d = a † d † b.

Ist z. B. die Proportion 3 — 6 = 8 — 11 gegegeben, so ist offenbar 3 † 11 = 6 † 8 = 14.

III. Zusatz: In jeder stättigen arithmetischen Proportion ist die Summe der äußeren Glieder dem doppelten mittleren Gliede gleich, weil jede solche Proportion ausgedrückt ist durch a — a † d — a † 2d, und hier offenbar a † a † 2d = 2(a † d) = 2a † 2d.

Ist z. B. die Proportion 8 — 10 — 12 gegeben, so ist 8 † 12 = 2 × 10 = 20.

IV. Zusatz: Wenn die Summe zweier Zahlen der Summe von zwei anderen Zahlen gleich ist, so kann man diese vier Zahlen allemal so in eine arithmetische Proportion bringen, daß man die beiden Zahlen der einen Summe zu mittleren, und die der anderen zu äußeren Gliedern nimmt; d. h., wenn

$a + m = b + f$, so verhält sich $a - b = f - m$, oder auch $b - a = m - f$.

Nach der Voraussetzung ist $a + m = b + f$, daher auch $m - f = b - a$ (III. §. 96. Zus. I.) und $a - b = f - m$; daher verhält sich $a - b = f - m$, oder $b - a = m - f$.

Ist z. B. $6 + 8 = 5 + 9$, so verhält sich $6 - 5 = 9 - 8$, oder $5 - 6 = 8 - 9$.

V. Zusatz: Wenn die Summe zweier Zahlen dem Duplum einer anderen Zahl gleich ist, so ist diese die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den beiden ersten Zahlen; d. h., wenn $a + c = 2b$, so verhält sich $a - b - c$, oder auch $c - b - a$.

Nach der Voraussetzung ist $a + c = 2b = b + b$, daher nach dem vorigen Zusatze $b - a = c - b$, und $b - c = a - b$; mithin verhält sich $a - b - c$, oder $c - b - a$.

Ist z. B. $8 + 10 = 2 \times 9$, so verhält sich $8 - 9 - 10$, oder $10 - 9 - 8$.

VI. Zusatz: Man findet zu mehreren gegebenen Größen die arithmetische Mittelzahl, oder das arithmetische Medium, wenn man die Summe aller gegebenen Zahlen durch die Anzahl derselben dividirt (I. §. 113. Beisp. III.)

Sind z. B. vier Zahlen gegeben, und man drückt sie durch a, b, c und d aus, während man die gesuchte Größe mit x bezeichnet, so erhält man folgende vier stättige arithmetische Proportionen:

$$a - x - b,$$
$$b - x - c,$$
$$c - x - d,$$
$$d - x - a;$$

Hier ist nach dem III. Zusatze dieses §. die Summe der äußeren Glieder immer dem Duplum des mittleren gleich, daher ist

$$a + b = 2x,$$
$$b + c = 2x,$$
$$c + d = 2x,$$
$$d + a = 2x,$$

somit $2a + 2b + 2c + 2d = 8x$, oder

$$a + b + c + d = 4x;$$

Sucht man in dieser Gleichung x, so ist $x = \frac{a + b + c + d}{4}$, und aus den angeführten Gründen, wenn n Größen gegeben sind, ist $x = \frac{a + b + c + d + e \ldots}{n}$.

Wenn z. B. ein Schüler den zweiten, dritten, fünften und sechsten Platz erhalten hat, so findet man die arithmetische Mittelzahl, wenn man die Summe $2 + 3 + 5 + 6 = 16$ mit 4 dividirt; es gehört demnach dem Schüler in Absicht auf diese vier Plätze im Durchschnitte der vierte Platz, weil $\frac{2 + 3 + 5 + 6}{4} = 4$.

Anmerkung: 1) Nach dem II. und III. Zusatze dieses §. können die arithmetischen Proportionen in Gleichungen, und nach dem IV. und V. Zusatze Gleichungen in arithmetische Proportionen verwandelt werden.

2) Mittels der im VI. Zusatze zur Bestimmung des arithmetischen Mediums aufgestellten Regel erhält man eine solche Zahl, die in vielen Fällen ohne merklichen Fehler als die gesuchte wahre Größe angenommen werden kann.

§. 25.

I. Aufgabe, zu drei gegebenen Zahlen die vierte arithmetische Proportionalzahl zu finden.

Auflösung:

1) Weil nebst den drei Zahlen auch die Ordnung bekannt sein muß, nach welcher sie als Glieder in der Proportion vorkommen sollen, so schreibe man x an die Stelle des fehlenden Gliedes, um dadurch die unbekannte Größe zu bezeichnen;

2) Man bilde sich aus der Proportion eine Gleichung, indem man die Summe der äußeren Glieder jener der mittleren Glieder gleich setzt (§. 24. Zus. II.);

3) In der Gleichung suche man nach den im III. Thl. §. 98. angegebenen Regeln die unbekannte Größe x;

4) Zur Probe setze man in der Proportion die gefundene Zahl, und es wird, im Falle die Auflösung richtig ist, wirklich die vierte arithmetische Proportionalzahl gefunden sein, was man daraus erkennt, daß die beiden arithmetischen Verhältnisse einander gleich sind, und deßhalb auch die Summe der äußeren Glieder der der mittleren gleich ist.

I. Beispiel:

Man soll zu den Zahlen 8, dann 12 und 18 die vierte arithmetische Proportionalzahl suchen, wenn zugleich bekannt ist, daß 8 das erste Glied, 12 das zweite, 18 das dritte, und die gesuchte Größe x das vierte Glied der Proportion bildet.

Auflösung:

1) Den hier gesetzten Bedingungen gemäß hat man folgende arithmetische Proportion:

$$8 - 12 = 18 - x;$$

2) Man bilde sich auf die angezeigte Weise die Gleichung, suche da x, und setze dann in der Proportion anstatt x die gefundene Zahl:

$$8 - 12 = 18 - x,$$

also $8 + x = 12 + 18$, und

$$x = 12 + 18 - 8 = 22,$$

daher $8 - 12 = 18 - 22.$

3) Die Zahl 22 ist wirklich die gesuchte vierte arithmetische Proportionalzahl, weil $12 - 8 = 4$, und $22 - 18$ ebenfalls $= 4$, während zugleich $8 + 22 = 12 + 18 = 30$.

II. Beispiel:

Man soll zu den Zahlen 8, dann 12 und 18 eine vierte Zahl finden, welche das dritte Glied der Proportion ist, während 8 das erste, 12 das zweite, und 18 das vierte Glied bildet.

Auflösung:

1) Der Voraussetzung gemäß hat man folgende Proportion:

$$8 - 12 = x - 18;$$

2) Diese Proportion verwandle man in eine Gleichung, suche da x, und setze in der Proportion anstatt x die gefundene Zahl:

$$8 - 12 = x - 18,$$

also $8 + 18 = 12 + x$, und
$8 + 18 - 12 = x$, oder
$x = 8 + 18 - 12 = 14$

daher $8 - 12 = 14 - 18;$

3) Die Zahl 14 ist wirklich die gesuchte Proportionalzahl, weil $12 - 8 = 4$, und $18 - 14$ ebenfalls $= 4$, während zugleich $8 + 18 = 12 + 14 = 26$.

Zusatz: Fehlt in der dißkreten arithmetischen Proportion eines der äußeren Glieder, und man drückt das bekannte äußere Glied mit a, und das unbekannte mit x aus, während die mittleren Glieder mit b und c bezeichnet werden, so verhält sich $a - b = c - x$, oder $x - b = c - a$; daher ist $a + x = b + c$, und $x = b + c - a$.

Fehlt aber eines der mittleren Glieder, und man drückt das bekannte mittlere Glied durch b, die äußeren Glieder durch a und c, und das unbekannte mittlere durch x aus, so verhält sich $a - b = x - c$, oder $a - x = b - c$; daher ist $x + b = a + c$, und $x = a + c - b$.

Dadurch sind die im II. Thl. §. 53. vorkommenden Regeln als allgemein giltig erwiesen.

§. 26.

II. Aufgabe, zu zwei gegebenen Zahlen die dritte arithmetische Proportionalzahl zu finden.

Auflösung:

1) Da nebst den beiden Zahlen auch die Stellen, welche ihnen in der Proportion zukommen, gegeben

sein müssen, so setze man x an die Stelle des fehlenden Gliedes;

2) Man bilde aus der Summe der äußeren Glieder und dem doppelten mittleren Gliede eine Gleichung (§. 24. Zus. III.);

3) In der Gleichung bestimme man x als die gesuchte Proportionalzahl, und setze die gefundene Zahl in der Porportion.

I. Beispiel:

Man soll zu den Zahlen 6 und 9 die dritte Proportionalzahl finden, wenn 6 das erste, 9 das zweite, und x das dritte Glied einer stättigen arithmetischen Proportion bildet.

Auflösung:

1) Nach der Voraussetzung hat man diese stättige Proportion:

$$6 — 9 — x;$$

2) Die Proportion verwandle man in eine Gleichung, suche da x, und setze in der Proportion anstatt x die gefundene Zahl:

$$6 — 9 — x,$$

also $6 + x = 2 \times 9$,

$$x = 2 \times 9 - 6 = 18 - 6 = 12,$$

daher $6 — 9 — 12$;

3) Die Zahl 12 ist wirklich die gesuchte dritte arithmetische Proportionalzahl, weil $9 - 6 = 3$, und $12 - 9$ ebenfalls $= 3$, während zugleich $6 + 12 = 2 \times 9 = 18$.

II. Beispiel:

Man suche zu 6 und 9 die mittlere arithmetische Proportionalzahl.

Auflösung:

1) Hier bildet x das mittlere Glied, man erhält demnach folgende stättige Proportion:

$$6 — x — 9;$$

2) Man bilde die Gleichung, suche da x, und setze anstatt x die gefundene Zahl in der Proportion:

$$\frac{6 - x - 9,}{\text{also } 6 + 9 = 2x, \text{ und}}$$

$$\frac{6 + 9}{2} = x, \text{ oder}$$

$$x = \frac{6 + 9}{2} = {}^{15}/_{2} = 7\,{}^{1}/_{2}$$

daher $6 - 7\,{}^{1}/_{2} - 9$;

3) Zur Probe findet man, daß $7\,{}^{1}/_{2} - 6 = 1\,{}^{1}/_{2}$, und $9 - 7\,{}^{1}/_{2} = 1\,{}^{1}/_{2}$, gleichwie $6 + 9 = 2 \times 7\,{}^{1}/_{2} = 15$.

Zusatz: Bei der stättigen arithmetischen Proportion kann dem Gesagten gemäß das fehlende Glied auf folgende Weise allgemein gefunden werden:

Fehlt in einer solchen Proportion eines der äußeren Glieder, und man drückt das bekannte äußere Glied durch a, das unbekannte durch x, und das mittlere durch b aus, so verhält sich $a - b - x$, oder $x - b - a$; daher ist $a + x = 2b$, und $x = 2b - a$; d. h., man findet das unbekannte äußere Glied, wenn man vom Duplum des mittleren Gliedes das bekannte äußere subtrahirt (II. §. 54. a.)

Fehlt aber das mittlere Glied, und es werden die äußeren Glieder durch a und b ausgedrückt, so verhält sich $a - x - b$, oder $b - x - a$; daher ist $a + b = 2x$, und $x = \frac{a + b}{2}$, d. h., die mittlere arithmetische Proportionalzahl, das arithmetische Medium, oder, wie man auch sagt, die arithmetische Mittelzahl zweier Zahlen ist ihrer halben Summe gleich (I. §. 113. Beisp. II., und II. §. 54. b.).

Anmerkung: Ich habe im II. Thl. §. 53. die Bemerkung schon gemacht, daß man, um gleiche arithmetische Verhältnisse, und somit eine arithmetische Proportion zu haben, beiderseits das Vorderglied vom Hintergliede, oder allemal das Hinterglied vom Vordergliede abziehen muß.

2) In Absicht auf die dißkreten und stättigen arithmetischen Proportionen kommen im II. Theile in den §§. 53, 54 und 64 mehrere Beispiele vor.

II. Abschnitt.

Von den arithmetischen Progressionen.

§. 27.

I. Lehrsatz:

Jede arithmetische Progression ist unter nachstehender Formel enthalten:

a, a † d, a † 2d, a † 3d, a † 4d. . . .

Beweis:

1) Die arithmetische Reihe oder Progression bilden Zahlen, die in gleichen stättigen arithmetischen Verhältnissen fortgehen, wo also zwischen einem Gliede, und dem unmittelbar darauf folgenden immer die nämliche Differenz ist (III. §. 88. d.);

2) Wenn a das erste Glied, und d die allen Verhältnissen gemeinschaftliche Differenz bezeichnet, so drückt a — a + d jedesmal das erste Verhältniß einer arithmetischen Reihe aus (§. 23.);

3) Das zweite Glied einer solchen Reihe ist zugleich ein Vorderglied (III. §. 88. Zus. I.); man findet daher sein Hinterglied, oder das dritte Glied der Reihe, wenn man die gemeinschaftliche Differenz d zum zweiten Gliede addirt, deßhalb ist das dritte Glied = a † 2d;

4) Aus den nämlichen Gründen findet man, wenn man die Differenz zum dritten Gliede addirt, das vierte Glied, welches = a † 3d, und überhaupt jedes folgende Glied dadurch, daß man allemal zum unmittelbar vorhergehenden Gliede den Unterschied d addirt.

Die vorstehende Formel bezeichnet also jede arithmetische Progression.

Ist z. B. bei einer zunehmenden arithmetischen Reihe von 6 Gliedern $a = 2$, und die gemeinschaftliche Differenz $d = 3$, so ist das zweite Glied $a + d = 2 + 3 = 5$, das dritte $a + 2d = 2 + 2 \times 3 = 2 + 6 = 8$, das vierte $a + 3d = 2 + 3 \times 3 = 2 + 9 = 11$, das fünfte $a + 4d = 2 + 4 \times 3 = 2 + 12 = 14$, und das sechste $a + 5d = 2 + 5 \times 3 = 2 + 15 = 17$, und man hat die zunehmende arithmetische Reihe $2, 2 + 3, 2 + 6, 2 + 9, 2 + 12, 2 + 15$, oder $2, 5, 8, 11, 14, 17$.

Ist die Reihe abnehmend, oder konvergirend (III. §. 88. c.), so ist die gemeinschaftliche Differenz negativ, man muß also $- d$, um die folgenden Glieder zu erhalten, addiren, somit d immerhin subtrahiren (III. §. 45. Lehrs. II. A.)

Es sei z. B. bei einer abnehmenden Reihe von 6 Gliedern das erste Glied $a = 12$, und die gemeinschaftliche Differenz oder $d = - 2$, so ist das zweite Glied $= a + d$ (§. 23. Zus.), somit hier $= a + (- d) = a - d = 12 - 2 = 10$, das dritte $a + (- 2d) = a - 2d = 12 - 2 \times 2 = 8$, das vierte $a + (- 3d) = a - 3d = 12 - 3 \times 2 = 6$, das fünfte $a + (- 4d) = a - 4d = 12 - 4 \times 2 = 4$, und das sechste Glied $a + (- 5d) = a - 5d = 12 - 5 \times 2 = 2$, und man hat die abnehmende arithmetische Reihe $12, 10, 8, 6, 4, 2$.

I. Zusatz: Jedes Glied einer arithmetischen Reihe ist eine Summe des ersten Gliedes, und der so vielfachen Differenz, als Glieder vorausgehen, folglich ist das nte, oder allgemeine Glied (III. §. 88. b.) gleich $a + (n - 1) d$.

II. Zusatz: Bezeichnet n die Anzahl aller Glieder einer solchen Reihe, und u das letzte Glied, so gibt der eben angeführte Ausdruck des allgemeinen Gliedes das letzte Glied; d. h., $u = a + (n - 1) d$, gleichwie dann daß vorletzte Glied $= a + (n - 2) d$.

III. Zusatz: Den vollständigen Ausdruck einer arithmetischen Reihe für jede beliebige Anzahl von

Gliedern, wenn dieselbe = n gesetzt wird, gibt nachstehende Formel:
a, a † d, a † 2d . . . a † (n — 2) d, a † (n — 1) d.

§. 28.

II. Lehrsatz:

In jeder arithmetischen Reihe ist allemal die Summe zweier Glieder, die vom ersten und letzten gleichweit abstehen, der Summe des ersten und letzten Gliedes gleich.

Beweis:

1) Wenn n die Anzahl aller Glieder ausdrückt, so ist in Gemäßheit des vorigen §. das erste Glied = a, das letzte nach dem II. Zusatze dieses §., oder u = a † (n — 1) d, somit a † u = a † a † (n — 1) d = 2a † (n — 1) d;

2) Das zweite Glied a † d ist vom ersten, und das vorletzte a † (n — 2) d vom letzten um die Differenz d verschieden; das zweite ist um d größer als das erste, und das vorletzte ist um d kleiner, als das letzte, mithin ist ihre Summe, oder a † d † a † (n — 2) d = a † d † a † nd — 2d = 2a † nd — d = 2a † (n — 1) d, d. h., ihre Summe ist gleich der Summe des ersten und letzten Gliedes, oder = a † u;

3) Wie nun vorwärts jedes folgende Glied immer um die Differenz d, welche positiv oder negativ sein kann (§. 23. Nro. 3.), wächst, so nimmt rückwärts jedes Glied um d ab; folglich ist die Summe eines jeden solchen Paares der Glieder = 2a † (n — 1) d = a † u.

Man habe z. B. die Reihe 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, so ist 3 † 17 = 5 † 15 = 7 † 13 = 9 † 11 = 20.

§. 29.

III. Lehrsatz:

Bei einer ungeraden Anzahl der Glieder einer arithmetischen Reihe ist das

mittlere Glied m der halben Summe des ersten und letzten Gliedes gleich; d. h., $m = \frac{a + u}{2}$.

Beweis:

1) Bezeichnet n die Anzahl aller Glieder, so ist im gegenwärtigen Falle n eine ungerade Zahl, und somit, wenn man das mittlere Glied wegrechnet, $n - 1$ eine gerade Zahl (III. §. 65.);

2) Von diesen $n - 1$ Gliedern gehen $\frac{n - 1}{2}$ Glieder dem mittleren voraus, und eben so viele folgen noch auf dasselbe, weil dem mittleren Gliede als solchem die Hälfte der übrigen Glieder vorausgeht, und die Hälfte nachfolgt;

3) Nach dem I. Zusatze des §. 27. ist also $m = a + \left(\frac{n - 1}{2}\right) d$;

4) Richtet man den Bruch ein (III. §. 67. Lehrs. II. Zus.), so erhält man $m = \frac{2a + (n - 1) d}{2}$, daher ist das mittlere Glied oder $m = \frac{a + u}{2}$ (§. 28. Nro. 1.).

Hat man z. B. die arithmetische Progression 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, so ist offenbar das mittlere Glied $8 = \frac{2 + 14}{2} = {}^{16}/_{2}$, somit der halben Summe des ersten und letzten Gliedes gleich.

§. 30.

IV. Lehrsatz:

Bei einer jeden arithmetischen Progression erhält man die Summe aller Glieder, wenn man die Summe des ersten und letz-

ten Gliedes mit der halben Anzahl der der Glieder multiplizirt; d. h., $S = (a + u) \frac{n}{2}$.

Beweis:

Die Anzahl der Glieder ist entweder eine gerade, oder eine ungerade Zahl (III. §. 65. Nro. 1.).

a) Ist dieselbe eine gerade Zahl, dann wird der Lehrsatz so bewiesen:

1) Nach §. 28. ist die Summe zweier Glieder, die vom ersten und letzten gleich weit abstehen, der Summe des ersten und letzten Gliedes gleich, somit $= a + u$.

2) Man erhält die Summe aller Glieder, wenn man die Summe aller Paare nimmt, welche alle Glieder geben;

3) Nun gibt es aber, weil die Reihe n Glieder hat, $\frac{n}{2}$ solche Paare, folglich ist die Summe der Reihe oder $S = (a + u) \frac{n}{2}$.

b) Für die ungerade Anzahl der Glieder wird der Beweis so geführt:

1) Nimmt man das mittlere Glied weg, so ist die Anzahl der bleibenden Glieder $n - 1$ eine gerade Zahl;

2) Von diesen ist wieder jedes Paar solcher Glieder, die vom ersten und letzten gleich weit abstehen, $= a + u$;

3) Die Summe aller dieser Paare, derer es $\frac{n-1}{2}$ gibt, enthält die Summe aller Glieder, mit Ausnahme des mittleren Gliedes, das daher, um die Summe der ganzen Reihe zu erhalten, der Summe jener Paare addirt werden muß; es ist also die Summe aller Glieder, oder $S = (a + u) \times \left(\frac{n-1}{2}\right) + m = \frac{an + un - a - u}{2} + m$;

4) Nach §. 29. ist $m = \frac{a + u}{2}$, man setze nun anstatt m diesen gleichen Ausdruck in der vorstehenden Gleichung, addire wirklich (III. §. 67. Lehrs. I.), verkleinere (III. §. 45. Lehrs. I.), und löse das Produkt in Faktoren auf (III. §. 87. IV.):

Nach Nro. 3. ist $S = \frac{an + un - a - u}{2} + m$,

dann $m = \frac{a + u}{2}$,

$$\text{daher ist } S = \frac{an + un - a - u}{2} + \frac{a + u}{2}$$

$$= \frac{an + un - a - u + a + u}{2}$$

$$= \frac{an + un}{2} = (a + u)\,\frac{n}{2}.$$

Es ist also immerhin die Summe der ganzen Reihe der mit der halben Anzahl der Glieder multiplizirten Summe des ersten und letzten Gliedes gleich.

Weil ein Produkt dadurch dividirt wird, daß man nur einen Faktor dividirt (III. §. 53. Lehrs. VI. Zus. II.), so kann man auch sagen, man erhält die Summe aller Glieder einer solchen Reihe, wenn man die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder multiplizirt, oder auch dadurch, daß man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder multiplizirt, und das Produkt mit 2 dividirt; d. h., $S = \left(\frac{a + u}{2}\right) n$, oder $S = \frac{(a + u)\,n}{2}$.

Es sei z. B. die Reihe 2, 4, 6, 8, 10, 12 gegeben, so ist $S = (2 + 12) \times {}^{6}/_{2} = 42$, was sich auch wirklich so verhält, weil die Summe aller Glieder, oder $S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = (2 + 12) + (4 + 10) + (6 + 8) = 14 \times 3 = 42$.

§. 31.

Entwickelung jener Formeln, nach welchen in Absicht auf die arithmetischen Progressionen alle möglichen Aufgaben aufgelöset werden.

I. Nach dem II. Zusatze des §. 27. ist das letzte Glied oder $u = a + (n - 1) d = a + dn - d.$

II. In dieser Gleichung, die ich mit A bezeichne, kommen vier Stücke vor, nämlich das erste Glied a, das letzte Glied u, die gemeinschaftliche Differenz d, und die Anzahl der Glieder, welche durch n ausgedrückt ist.

III. Nach den im III. Thl. §. 98. aufgestellten Regeln kann jedes dieser vier Stücke, wenn man sie als unbekannte Größen betrachtet, bestimmt werden, und man erhält folgende vier Gleichungen:

$$\text{A)} \qquad u = a + (n - 1) d,$$

1) $u = a + d (n - 1) = a + dn - d,$
2) $a = u - d (n - 1) = u - dn + d,$
3) $n = \dfrac{u - a + d}{d} = \dfrac{u - a}{d} + 1,$
4) $d = \dfrac{u - a}{n - 1}.$

IV. Nach §. 30. ist $S = (a + u)\frac{n}{2}$; in dieser Gleichung, die ich mit B bezeichne, kann man auf eine ähnliche Weise nach dem vorhin zitirten §. die Größen S, a, u und n bestimmen, und man erhält folgende vier neue Gleichungen:

$$\text{B)} \qquad S = (a + u)\frac{n}{2},$$

5) $S = (a + u)\dfrac{n}{2} = \dfrac{an + un}{2},$
6) $u = \dfrac{2S - an}{n} = \dfrac{2S}{n} - a,$

7) $a = \frac{2S - un}{n} = \frac{2S}{n} - u$,

8) $n = \frac{2S}{a + u}$.

V. Die Größen u, a und n kommen zweimal vor; man bekömmt daher durch die Vergleichung der Werthe folgende drei neue Gleichungen, die ich mit C, D und E benenne:

C) $a + dn - d = \frac{2S - an}{n}$, wegen u;

D) $u - dn + d = \frac{2S - un}{n}$, wegen a;

E) $\frac{u - a + d}{d} = \frac{2S}{a + u}$, wegen n.

VI. In der Gleichung C können die Größen a, d, n und S, in der Gleichung D die Größen u, d, n und S, und in der Gleichung E die Größen u, a, d und S bestimmt werden; man erhält dadurch folgende zwölf neue Gleichungen, von welchen die mit Nro. 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17 und 18 bezeichneten nach den im III. Theile §. 93. aufgestellten Regeln, dagegen aber die mit 12, 16, 19 und 20 bezeichneten nach den in diesem Theile §. 21. gegebenen Vorschriften aufgelöset werden. Wird in der Gleichung C die Größe n gesucht, so sehe man in §. 21. das ausgearbeitete III. Beispiel nach:

C) $a + dn - d = \frac{2S - an}{n}$,

$an + dn^2 - dn = 2S - an$,

9) $S = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$

$= an + \frac{1}{2}dn^2 - \frac{1}{2}dn$

$= an + \frac{1}{2}dn(n - 1)$,

Bayerische Staatsbibliothek München

10) $d = \frac{2S - 2an}{n^2 - n} = \frac{2(S - an)}{n(n - 1)}$,

11) $a = \frac{2S - dn^2 + dn}{2n}$

$= \frac{S}{n} - \frac{1}{2}dn + \frac{1}{2}d$

$= \frac{S}{n} - \frac{1}{2}d(n - 1)$,

12) $n = -\left(\frac{2a - d}{2d}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2S}{d} + \frac{4a^2 - 4ad + d^2}{4d^2}\right)}$

$= \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{2S}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d}\right)}$;

D) $u - dn + d = \frac{2S - un}{n}$,

$un - dn^2 + dn = 2S - un$,

13) $S = \frac{2un - dn^2 + dn}{2}$

$= un - \frac{1}{2}dn^2 + \frac{1}{2}dn$

$= un - \frac{1}{2}dn(n - 1)$,

14) $d = \frac{2un - 2S}{n^2 - n} = \frac{2(un - S)}{n(n - 1)}$,

15) $u = \frac{2S + dn^2 - dn}{2n}$

$= \frac{S}{n} + \frac{1}{2}dn - \frac{1}{2}d$

$= \frac{S}{n} + \frac{1}{2}d(n - 1)$,

16) $n = \frac{2u + d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{4u^2 + 4ud + d^2}{4d^2} - \frac{2S}{d}\right)}$

$= \frac{u}{d} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u^2}{d^2} + \frac{u}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2S}{d}\right)}$;

$$E)\ \frac{u - a + d}{d} = \frac{2S}{a + u},$$

$$u - a + d = \frac{2dS}{a + u},$$

$$au - a^2 + ad + u^2 - au + du = 2dS;$$

$$17)\ S = \frac{u^2 - a^2 + du + ad}{2d},$$

$$= \frac{(u + a)\,(u - a) + d(u + a)}{2d}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{2}(u + a)\,(u - a)}{d} + \tfrac{1}{2}(u + a),$$

$$18)\ d = \frac{u^2 - a^2}{2S - a - u} = \frac{(u + a)\,(u - a)}{2S - (a + u)},$$

$$19)\ u = \pm \sqrt{(2dS + a^2 + \tfrac{1}{4}d^2 - ad)} - \frac{d}{2},$$

$$20)\ a = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(u^2 + du + \frac{d^2}{4} - 2dS\right)}.$$

VII. Bei jeder dieser Formeln kommen nur vier Stücke vor; wenn demnach drei Stücke bekannt sind, so kann man in der Gleichung die vierte unbekannte Größe nach den bei Nro. VI. zitirten §§. allemal finden, und die Anzahl der bei den arithmetischen Progressionen möglichen Aufgaben beläuft sich auf zwanzig, weil die fünf Hauptgleichungen A, B, C, D und E vorhanden sind, und in jeder dieser Gleichungen vier Werthe bestimmt werden können.

VIII. Zur bequemern Benützung bringe ich diese zwanzig Formeln auf nachstehende Weise in eine Tabelle, für welche ich Folgendes bemerke:

1) In der ersten Spalte kommen in alphabetischer Ordnung die gesuchten Stücke, nämlich a, d, n, S und u vor. Wie es bekannt ist, bezeichnet

a das erste Glied, d die gemeinschaftliche Differenz, n die Anzahl der Glieder, S die Summe aller Glieder, und u das letzte Glied jeder arithmethischen Reihe;

2) Die zweite Spalte enthält die gegebenen Stücke, durch die man in den Stand versetzt ist, nach der in der dritten Spalte beigesetzten Formel die unbekannte Größe zu finden;

3) In der letzten Spalte wird durch die beigesetzten Buchstaben und Nummern auf die vorstehende Entwickelung der Formeln zurückgewiesen;

4) Wo für die nämliche unbekannte Größe mehrere Werthe ausgesetzt sind, ist allemal der zur Berechnung bequemere Ausdruck gewählt worden;

5) Wenn die Reihe abnehmend ist, so ist die gemeinschaftliche Differenz negativ (§. 23. Zus.); man muß daher in den Formeln die Größe d negativ, und somit — d anstatt d setzen;

6) Die Quadratwurzel kann positiv, oder negativ sein (III. §. 73. Zus. I.); um deßwillen nehme man von den zwei möglichen Wurzeln, im Falle nicht beide zugleich angenommen werden können, diejenige, welche den Bedingungen der vorliegenden Aufgabe entspricht, was man entweder unmittelbar aus der Beschaffenheit der Aufgabe selbst, oder auch daher erkennen wird, daß man über die angenommene Wurzel die Probe macht, indem man aus einer andern Formel eines der vorhin bekannt gewesenen Stücke sucht.

Tabelle der Formeln,

nach welchen

die bei den arithmetischen Reihen vorkommenden verschiedenen Aufgaben aufgelöset werden.

Man sucht	Man gibt die Stücke	Nach der Formel	welche vorkömmt bei
a	d, n, u	1) $a = u - d(n - 1)$,	A, Nro. 2.
	n, S, u	2) $a = \frac{2S}{n} - u$,	B, — 7.
	d, n, S	3) $a = \frac{S}{n} - \frac{1}{2}d(n - 1)$;	C, — 11.
	d, S, u	4) $a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{(u^2 + du + \frac{1}{4}d^2 - 2dS)}$;	E, — 20.

Man sucht	Man gibt die Stücke	Nach der Formel	welche vorkömmt bei
d	a, n, u	5) $d = \frac{u - a}{n - 1}$,	A, Nro. 4
	a, n, S	6) $d = \frac{2(S - an)}{n(n - 1)}$,	C, — 10.
	n, S, u	7) $d = \frac{2(un - S)}{n(n - 1)}$,	D, — 14.
	a, S, u	8) $d = \frac{(u + a)\ (u - a)}{2S - (u + a)}$;	E, — 18.
n	a, d, u	9) $n = \frac{u - a}{d} + 1$,	A, — 3.
	a, S, u	10) $n = \frac{2S}{a + u}$,	B, — 8.
	a, d, S	11) $n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{2S}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d}\right)}$,	C, — 12.
	d, S, u	12) $n = \frac{u}{d} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u^2}{d^2} + \frac{u}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2S}{d}\right)}$;	D, — 16.

Man sucht	Man gibt die Stücke	Nach der Formel	welche vorkömmt bei
S	a, n, u	13) $S = (a + u)\frac{n}{2}$,	B, Nro. 5.
	a, d, n	14) $S = an + \frac{1}{2}dn(n - 1)$,	C, — 9.
	d, n, u	15) $S = un - \frac{1}{2}dn(n - 1)$,	D, — 13.
	a, d, u	16) $S = \frac{\frac{1}{2}(u + a)(u - a)}{d} + \frac{1}{2}(u + a)$;	E, — 17.
u	a, d, n	17) $u = a + (n - 1)d$,	A, — 1.
	a, n, S	18) $u = \frac{2S}{n} - a$,	B, — 6.
	d, n, S	19) $u = \frac{S}{n} + \frac{1}{2}d(n - 1)$,	D, — 15.
	a, d, S	20) $u = \pm\sqrt{(2dS + a^2 + \frac{1}{4}d^2 - ad)} - \frac{1}{2}d$.	E, — 19.

§. 32.

Beispiele zur Uebung.

I.

Es setzt jemand zwölf Mal in die Lotterie, und zwar das erste Mal 1 fl., das zweite Mal 3 fl., das dritte Mal 5 fl., und immer bei der folgenden Ziehung um 2 fl. mehr, als bei der unmittelbar vorhergehenden; wie groß war der Einsatz bei der zwölften Ziehung, und welche Summe wurde auf diese Weise in die Lotterie bei allen zwölf Ziehungen gesetzt?

Auflösung:

a) Hier hat man eine arithmetische Reihe, bei welcher zuerst das letzte Glied, oder u gesucht wird, und wo das erste Glied $a = 1$, die gemeinschaftliche Differenz $d = 2$, und die Anzahl der Glieder $n = 12$ ist; um deßwillen ist aus der Tabelle des vorigen §. die 17te Formel zu benützen, nach welcher $u = a + d(n - 1)$, und somit $= 1 + 2(12 - 1) = 23$; es wurde also das letzte Mal die Summe von 23 fl. gesetzt;

b) Will man, um auch die Summe der ganzen Reihe oder S zu finden, das so eben gefundene letzte Glied nicht benützen, so wird dieselbe aus den gegebenen Stücken a, d und n nach der 14ten Formel der Tabelle gefunden; es ist nämlich $S = an + \frac{1}{2}dn \times (n-1)$, somit $= 1 \times 12 + \frac{1}{2} \times 2 \times 12(12-1) = 12 + 12 \times 11 = 144$.

Zur Probe suche man eines der vorkommenden Stücke nach einer anderen Formel, etwa S nach der Formel $S = (a + u)\,\frac{n}{2}$, man findet wieder 144, indem $S = (1 + 23)\,{}^{12}\!/_{2} = 24 \times 6 = 144$.

II.

Bei Anlegung einer Plantage war der zu bepflanzende Raum so beschaffen, daß in der ersten Reihe 8 Bäume, und in der letzten 43 gesetzt werden konn-

ten, während in jeder folgenden Reihe 1 Baum mehr zu stehen kam; wie viele Reihen von Bäumen waren da, und wie groß war die Anzahl aller gepflanzten Bäume?

Auflösung:

a) Man hat hier eine arithmetische Progression, wo $a = 8$, dann $u = 43$, und $d = 1$, und man sucht zuerst n; nach der 9ten Formel der Tabelle ist $n = \frac{u - a}{d} + 1$, daher ist n in diesem Beispiele $= \frac{43 - 8}{1} + 1 = 35 + 1 = 36$, es waren also 36 Reihen von Bäumen.

b) Will man, wie vorhin, S ebenfalls aus den anfangs gegebenen Stücken finden, so ist die 16te Formel der Tabelle zu benützen; nach dieser ist $S = \frac{\frac{1}{2}(u + a)(u - a)}{d} + \frac{1}{2}(u + a) =$
$\frac{\frac{1}{2} \times (43 + 8)(43 - 8)}{1} + \frac{1}{2}(43 + 8) =$
$\frac{51}{2} \times 35 + \frac{51}{2} = \frac{1785}{2} + \frac{51}{2} = 918.$

Zur Probe suche man auch S nach der Formel $S = (a + u)\frac{n}{2}$, man findet wieder, daß $S = (8 + 43) \times \frac{36}{2} = 51 \times 18 = 918.$

III.

Wie groß ist das erste Glied einer abnehmenden arithmetischen Reihe, wo das letzte Glied $u = 2$, die Differenz $d = -2$, und die Anzahl der Glieder $n = 9$?

Auflösung:

Nach der 1ten Formel der Tabelle ist $a = u - d(n - 1)$; daher ist in diesem Falle $a = 2 - (9 - 1) \times -2 = 2 - (8 \times -2) = 2 - (-16) = 2 + 16 = 18$, es ist also die Zahl 18,

weil eine negative Größe subtrahirt wird (III. §. 45. Lehrs. III. A.), das gesuchte erste Glied dieser Reihe.

Zur Probe kann man nach der 17ten Formel der Tabelle aus a, d, n das letzte Glied u suchen; man wird finden, daß $u = a + d(n - 1) = 18 + (8 \times - 2) = 18 - 16 = 2$.

IV.

Wie groß ist die Summe von n ungeraden Zahlen?

Auflösung:

Die erste ungerade Zahl a ist = 1, die Differenz d ist = 2, und n ist noch unbestimmt; nach der 14ten Formel ist $S = an + \frac{1}{2}dn(n - 1) = 1 \times n + \frac{1}{2} \times 2 \times n(n - 1) = n + n^2 - n = n^2$; man erhält also allemal die Summe solcher Zahlen, wenn man die Zahl n, welche die Anzahl der Glieder angibt, zum Quadrate erhebt, und umgekehrt erhält man das Quadrat einer jeden ganzen Zahl, wenn man der Ordnung nach, bei 1 angefangen, so viele ungerade Zahlen addirt, als die gegebene Zahl Einheiten enthält.

Um deßwillen ist z. B. die Summe der ersten sechs ungeraden Zahlen $= 6^2 = 36$, und umgekehrt das Quadrat von 6 oder 6^2 ist $= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$.

V.

Wie groß ist das erste Glied einer arithmetischen Reihe, bei welcher u = 21, dann d = 2, und S = 120?

Auflösung:

Nach der 4ten Formel der Tabelle ist, weil hier die Stücke d, u und S gegeben sind, und a gesucht wird, $a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{(u^2 + du + \frac{1}{4}d^2 - 2dS)} = \frac{1}{2} \times 2 \pm \sqrt{(441 + 2 \times 21 + \frac{1}{4} \times 4 - 2 \times 2 \times 120)} = 1 \pm \sqrt{(483 + 1 - 480)} = 1$

$\pm \sqrt{4} = 1 \pm 2$, somit ist $a = 1 + 2 = 3$, oder $= 1 - 2 = -1$.

Hier kann die positive und negative Wurzel genommen werden; im ersten Falle erhält man die Reihe 3, 5, 7, 9 . . . 21, und im zweiten — 1, 1, 3, 5, 7, 9 . . . 21. Weil $-1 + 1 = 0$, so hat man allemal Progressionen, bei welchen $S = 120$, dann $d = 2$ und $u = 21$.

Zur Probe kann man aus a, d, und u die Summe S nach der 16ten Formel suchen, in welcher $S = \frac{\frac{1}{2}(u + a)(u - a)}{d} + \frac{1}{2}(u + a)$.

Im ersten Falle ist $S = \frac{\frac{1}{2}(21 + 3)(21 - 3)}{2} + \frac{1}{2}(21 + 3) = \frac{12 \times 18}{2} + 12 = 6 \times 18 + 12 = 120$.

Im zweiten Falle ist $S = \frac{\frac{1}{2}(21 - 1)(21 + 1)}{2} + \frac{1}{2}(21 - 1) = \frac{10 \times 22}{2} + 10 = 5 \times 22 + 10 = 120$.

VI.

Wie groß ist die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Reihe, bei welcher $u = 16$, dann $d = 3$, und $S = 51$.

Auflösung:

Nach der 12ten Formel der Tabelle ist $n = \frac{u}{d} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u^2}{d^2} + \frac{u}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2S}{d}\right)}$, somit ist in diesem Beispiele $n = \frac{16}{3} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{256}{9} + \frac{16}{3}}$

$+ \frac{1}{4} - \frac{102}{3}) = 5\frac{5}{6} \pm \sqrt{(34\frac{1}{36} - 34)} = 5\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36}} = 5\frac{5}{6} \pm \frac{1}{6}$.

Mittels der positiven Wurzel findet man $n = 5\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 6$, und bei der negativen Wurzel ist $n = 5\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = 5\frac{4}{6} = 5\frac{2}{3}$; das letztere hat hier keinen Sinn, weil die Anzahl der Glieder gesucht wird; um deßwillen wird die positive Wurzel genommen, und man findet, daß diese Reihe sechs Glieder hat.

Zur Probe kann man S aus u, d und n suchen; es ist nach der 15ten Formel der Tabelle $S = un - \frac{1}{2}dn(n - 1) = 16 \times 6 - \frac{1}{2} \times 3 \times 6(6 - 1) = 96 - \frac{3}{2} \times 6 \times 5 = 96 - 45 = 51$.

VII.

Ein Thurm ist 375 Pariser Fuß hoch; wie viele Sekunden verfließen, bis ein Stein von der Spitze desselben auf den Boden fällt?

Auflösung:

Weil der Stein in einer gleichförmig beschleunigten Bewegung herabfällt, und zwar in der ersten Sekunde beinahe 15 Pariser Fuß, in der zweiten 45, in der dritten 75 ꝛc., so bilden die durchlaufenen Räume eine arithmetische Reihe (III. §. 91. Beisp. V.), in welcher hier $a = 15$, dann $d = 30$, und $S = 375$.

Nach der 11ten Formel der Tabelle ist $n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{2S}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d}\right)}$. Weil $\frac{2S}{d} = \frac{2 \times 375}{30} = 25$, dann $\frac{a}{d} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, und $\frac{a^2}{d^2} = \frac{1}{4}$, so ist $n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \pm \sqrt{(25 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2})} = \pm \sqrt{25} = \pm 5$.

Hier kann die negative Wurzel nicht genommen werden, es ist also $n = 5$, und der Stein fällt in 5 Sekunden von einem solchen Thurme herab.

Die Probe kann man dadurch machen, daß man aus a, n und S nach der 6ten Formel der Tabelle die Differenz d sucht; es ist nach dieser Formel

$$d = \frac{2(S - an)}{n(n - 1)} = \frac{2(375 - 15 \times 5)}{5(5 - 1)} = {}^{600}/_{20} = 30.$$

VIII.

Eine mathematische Charade.

Auf die Frage eines Stadtbewohners, wie man die Fruchtart nenne, die eben auf dem Felde bemerkt wurde, gab ein Landmann folgende Antwort:

Ich gebe Ihnen vier Zahlen, diese sprechen Sie deutsch aus, nehmen der Ordnung nach davon die Anfangsbuchstaben, und Sie haben die Benennung dieser Fruchtart.

a) Die erste dieser Zahlen gibt die Summe einer arithmetischen Progression von 9 Gliedern, von welchen das erste Glied = $^1/_2$ und das letzte = $1\,^1/_{18}$ ist;

b) Die zweite Zahl stellt sowohl die Differenz, als das erste Glied einer arithmetischen Reihe vor, bei welcher die Anzahl der Glieder, und das letzte Glied gleiche Zahlen sind;

c) Die dritte Zahl stellt sowohl die Differenz, als die Anzahl der Glieder einer anderen arithmetischen Reihe vor, wo das erste Glied = 28, und das letzte = 100 ist;

d) Die vierte Zahl endlich ist das letzte Glied einer abnehmenden arithmetischen Reihe von 8 Gliedern, wo das erste Glied = 33, und die gemeinschaftliche Differenz = − 4 ist.

Auflösung:

a.

Bei der ersten arithmetischen Reihe ist $a = {}^1/_2$, dann $u = 1\,^1/_8$, und $n = 9$, man benützt daher, um die Summe oder S zu finden, die 13te Formel

der Tabelle; es ist nach dieser $S = (a + u)\frac{n}{2}$, und daher $= (\frac{1}{2} + 1\frac{1}{18})\frac{9}{2} = \frac{28}{18} \times \frac{9}{2} = \frac{252}{36} = 7$. Die erste verlangte Zahl ist demnach 7.

b.

Um die zweite Zahl zu finden, nehme man aus der Tabelle die 1te, oder die 5te Formel, weil in beiden die genannten Stücke vorkommen, und in der einen a, und in der andern d bestimmt ist.

Nimmt man die 1te Formel, so ist $a = u - d(n - 1) = u - dn + d$; weil ferner $a = d$, und $n = u$, so ist $a = u - ud + a$, somit $o = u - ud$, und $ud = u$, daher a oder $d = 1$. Es ist also 1 die zweite Zahl.

c.

Zur Bestimmung der dritten Zahl kann man, indem $a = 28$, und $u = 100$, aus der Tabelle die 5te Formel nehmen; es ist nach dieser $d = \frac{u - a}{n - 1}$, und daher, weil $d = n$, auch $d = \frac{u - a}{d - 1}$.

In dieser Gleichung hebt man den Bruch auf (III. §. 97. b.); man erhält dadurch die gemischte quadratische Gleichung $d^2 - d = u - a$, welche, nach den im §. 21. angegebenen Regeln aufgelöset, für d den Werth $1 \pm \frac{17}{2}$ gibt, wie aus Nachstehendem ersichtlich ist:

$$d^2 - d = u - a,$$
$$d^2 - d + \tfrac{1}{4} = u - a + \tfrac{1}{4},$$
$$\sqrt{(d^2 - d + \tfrac{1}{4})} = \sqrt{(u - a + \tfrac{1}{4})},$$
$$d - \tfrac{1}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{4u - 4a + 1}{4}\right)},$$
$$d = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{400 - 112 + 1}{4}\right)}$$
$$= \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{289}{4}} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{17}{2}.$$

Nimmt man den negativen Werth, so ist $d = \frac{1}{2} - \frac{17}{2} = -8$, nimmt man aber den positiven, so ist $d = \frac{1}{2} + \frac{17}{2} = 9$. Es ist also, weil hier die positive Wurzel als die Differenz der steigenden Reihe zu nehmen ist, 9 die verlangte dritte Zahl.

d.

Weil die vierte Zahl das letzte Glied einer abnehmenden arithmetischen Reihe ist, bei welcher $n = 8$, dann $a = 33$, und $d = -4$, so ist die 17te Formel zu benützen; nach dieser ist $u = a + d(n-1) = 33 + (8-1) \times -4 = 33 + 7 \times -4 = 33 - 28 = 5$; es ist daher 5 die gesuchte vierte Zahl.

Nimmt man endlich von diesen vier Zahlen, welche in deutscher Sprache geschrieben werden, die Anfangsbuchstaben, nämlich von 7 den Buchstaben S, von 1 den Buchstaben e, von 9 den Buchstaben n, und von 5 den Buchstaben f, so erhält man das Wort Senf, welches die Benennung der bemerkten Fruchtart war.

Anmerkung: 1) Im III. Thl. §. 91. kommen bei den ersten fünf Beispielen einige der hier aufgestellten Formeln in Anwendung, weil bei diesen Aufgaben arithmetische Reihen vorkommen; dort sind diese Formeln nur benützt, während hier in den vorstehenden §§. die Richtigkeit und allgemeine Giltigkeit derselben bewiesen wurde.

2) Unter den hier ausgearbeiteten Beispielen wählte ich auch absichtlich solche, bei welchen bei der Ausziehung der Quadratwurzel auch manchmal die negative Wurzel gebraucht werden konnte. Sieht man bloß auf die Gleichung, und nimmt man da auf die darin vorkommenden benannten Zahlen keine Rücksicht, so kann man die positive und negative Wurzel zugleich nehmen; sieht man aber auf die individuelle Beschaffenheit der Aufgabe, so gibt es Fälle, wo nur eine eine einzige dieser beiden Wurzeln den gegebenen Bedingungen Genüge leistet (§. 31. VIII. Nro. VI.).

III. Abschnitt.

Von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen.

I.

Von den geometrischen Verhältnissen.

§. 33.

I. Lehrsatz:

Jedes geometrische Verhältniß ist unter nachstehender Formel enthalten:

$$a : am.$$

Beweis:

1) Beim geometrischen Verhältnisse werden zwei Zahlen durch Division mit einander verglichen, man untersucht nämlich dabei, wie oft, und, weil man in der Buchstabenrechnung auch auf die Zeichen der Größen sieht, wie die erste Zahl, oder ein aliquoter Theil derselben gesetzt werden muß, um die zweite zu erhalten (II. §. 47. b.);

2) Jedes Vorderglied kann durch a, und jedes Hinterglied durch b, somit jedes geometrische Verhältniß durch a : b ausgedrückt werden (II. §. 48. a, b. und e.);

3) Man erhält den Exponenten des geometrischen Verhältnisses allemal dadurch, daß man das Hinterglied mit dem Vordergliede dividirt (II. §. 50. e.), wo dann der gefundene Quotient, oder der Exponent des Verhältnisses, den man mit m bezeichnet, eine ganze oder gebrochene Zahl ist, je nachdem das Verhältniß zu- oder abnimmt, wie auch positiv oder negativ, je nachdem die Glieder gleiche, oder verschiedene

Zei-

Zeichen haben; es ist also b : a oder $\frac{b}{a} = m$, und daher $b = am$;

4) Setzt man endlich in dem Verhältnisse a : b anstatt b den gleichen Ausdruck am, so erhält man a : am als die allgemein giltige Formel für alle geometrischen Verhältnisse.

I. Zusatz: Man erhält, im Falle das erste Glied, und der Exponent des geometrischen Verhältnisses gegeben ist, allemal dadurch das Hinterglied, daß man das Vorderglied mit dem Exponenten multiplizirt.

Ist z. B. das Vorderglied oder $a = 4$, und der Exponent oder $m = 3$, so ist $b = am = 4 \times 3 = 12$, und man hat das zunehmende geometrische Verhältniß 4 : 12; ist aber z. B. das Vorderglied $a = 5$, und der Exponent $m = - \frac{3}{5}$, so ist $am = 5 \times - \frac{3}{5} = - 3$, und man hat das abnehmende geometrische Verhältniß 5 : — 3.

II. Zusatz: Weil man hier, was in der gemeinen Arithmetik der Fall nicht ist, auch auf die Zeichen der Größen Rücksicht nimmt, so hat der Exponent des Verhältnisses das Zeichen + oder —, je nachdem die beiden Glieder gleiche, oder verschiedene Zeichen haben, und umgekehrt, wenn der Exponent das Zeichen + vor sich hat, so müssen beide Glieder gleiche, und wenn der Exponent das Zeichen — hat, so müssen beide Glieder verschiedene Zeichen haben (III. §. 57.).

Daher heißt man auch zwei gleiche geometrische Verhältnisse (II. §. 50. b.), derer Exponenten gleiche Zeichen haben, gleiche übereinstimmige Verhältnisse, und derer Exponenten verschiedene Zeichen haben, gleiche entgegengesetzte Verhältnisse.

III. Zusatz: Das geometrische Verhältniß heißt rational oder irrational, je nachdem der Exponent desselben eine National- oder Irrationalzahl ist. So ist z. B. das Verhältniß 2 : 4 ein rationales, dagegen aber $\sqrt{3} : \sqrt{5}$ ein irrationales.

Im geometrischen irrationalen Verhältnisse heißt

man die Glieder inkommensurable Größen, weil dann das Hinterglied durch das Vorderglied nicht genau gemessen werden kann.

Es läßt sich aber durch Annäherung immer ein solches rationales Verhältniß finden, daß dem irrationalen sehr nahe kömmt, und ohne merklichen Unterschied dafür gesetzt werden kann; wodurch dann die inkommensurablen Größen auf kommensurable, d. h., auf solche reduzirt werden, von welchen die eine die andere mißt.

Anmerkung: 1) Einige dividiren das Vorderglied mit dem Hintergliede, um den Exponenten des Verhältnisses zu erhalten, was aber in diesem Werke nicht geschieht, weil ich immer das Hinterglied mit dem Vordergliede dividire;

2) Unter dem Ausdrucke messen versteht man hier eben so viel, als unter dem Worte dividiren; eine Zahl mißt die andere, wenn sie, oder ein aliquoter Theil von ihr mehrmal positiv oder negativ gesetzt die andere wieder gibt.

3) Was Irrationalzahlen sind, ist schon früherhin bei der Lehre von den Potenzen und Wurzeln gesagt worden; zugleich ist im III. Thl. §. 30 und 37. schon gezeigt worden, wie mittels der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln Irrationalzahlen durch Annäherung so auf Rationalzahlen reduzirt werden können, daß das noch Fehlende als verschwindend betrachtet werden kann.

4) Was in der Anmerkung des §. 23. gesagt wurde, hier ebenfalls zu berücksichtigen.

§. 34.

II. Lehrsatz:

A) Das geometrische Verhältniß zweier Zahlen bleibt unverändert, wenn man beide Glieder mit der nämlichen Zahl multiplizirt;

B) Ein solches Verhältniß bleibt auch unverändert, wenn man beide Glieder mit der nämlichen Zahl dividirt.

Beweis von A.

1) Man drücke das geometrische Verhältniß allgemein durch a : b aus: multiplizirt man beide Glieder

mit der Zahl n, so erhält man das Verhältniß an : bn; in diesem ist der Exponent $= \frac{bn}{an}$, und im vorigen ist er $= \frac{b}{a}$;

2) Nun ist $\frac{bn}{an} = \frac{b}{a}$, weil da nur der Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl multiplizirt ist (III. §. 66. d.); es haben also diese Verhältnisse den nämlichen Exponenten;

3) Geometrische Verhältnisse von gleichen Exponenten sind gleich (II. §. 50. b.), somit ist a : b = an : bn; d. h., das Verhältniß wird nicht verändert, wenn man beide Glieder mit der nämlichen Zahl multiplizirt.

Beweis von B.

1) Wenn man im Verhältnisse a : b beide Glieder mit n dividirt, so erhält man das Verhältniß $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$; in diesem ist der Exponent gleich $\frac{b}{n}$ dividirt durch $\frac{a}{n}$, somit $= \frac{bn}{an}$, und in jenem ist er $= \frac{b}{a}$;

2) Die beiden Exponenten $\frac{bn}{an}$ und $\frac{b}{a}$ sind aus dem vorhin angeführten Grunde einander gleich, somit sind es auch die Verhältnisse, d.h., $a : b = \frac{a}{n} : \frac{b}{n}$; das geometrische Verhältniß bleibt also auch unverändert, wenn man beide Glieder mit der nämlichen Zahl dividirt.

Es ist daher z. B. das Verhältniß 2 : 4 gleich dem Verhältnisse $2 \times 3 : 4 \times 3 = 6 : 12$, weil $4/2 = 12/6 = 2$; eben so ist das Verhältniß 8 : 16 gleich dem Verhältnisse $8/4 : 16/4 = 2 : 4$, weil $16/8 = 4/2 = 2$.

I. Zusatz: Das Verhältniß zweier Brüche läßt sich allemal dadurch auf das Verhältniß ganzer Zahlen bringen, daß man die Brüche unter gleiche Benennung bringt (II. §. 18. und III. §. 66. g.), wo sich dann Brüche von gleichen Nennern wie ihre Zähler verhalten.

Der erste Bruch kann allgemein durch $\frac{a}{b}$, der zweite durch $\frac{c}{d}$, und das Verhältniß beider zu einander durch $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ ausgedrückt werden. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist $= \frac{ad}{bd}$, und $\frac{c}{d}$ ist $= \frac{bc}{bd}$, daher ist auch das Verhältniß $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ gleich dem Verhältnisse $\frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd}$; multiplizirt man mit bd beide Brüche (III. §. 66. c.), so erhält man das Verhältniß $ad : bc$, welches vermöge des Lehrsatzes dem vorigen gleich ist; d. h.,

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = ad : bc.$$

Es ist also z. B. das Verhältniß $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$ gleich dem Verhältnisse $\frac{18}{24} : \frac{20}{24} = 18 : 20 = 9 : 10$, d. h., $\frac{3}{4}$ verhält sich zu $\frac{5}{6}$ wie 9 zu 10, weil man auch beide Glieder, ohne das Verhältniß zu verändern, mit der nämlichen Zahl dividiren kann (Lehrs. B.).

II. Zusatz: Zwei Irrationalzahlen können in einem rationalen geometrischen Verhältnisse stehen, wenn die nämliche Irrationalzahl in beiden Gliedern als Faktor oder Divisor vorkömmt; es ist daher z. B. das Verhältniß $5\sqrt{3} : 10\sqrt{3} = 5 : 10$, indem man hier beide Glieder mit der nämlichen Zahl $\sqrt{3}$ dividiren kann.

III. Zusatz: Weil man, was in der 3. Anmerkung des vorigen §. bemerkt wurde, durch Annähe-

rung Irrationalzahlen auf rationale bringen kann, so läßt sich jedes Irrationalverhältniß durch Annäherung auf ein rationales reduziren.

Anmerkung: In dem hier aufgestellten Lehrsatze, und dem beigefügten I. Zusatze findet man jene Regeln als allgemein giltig erwiesen, die in Betreff der geometrischen Verhältnisse im II. Thl. §. 50. bei f und g vorkommen.

II.

Von den geometrischen Proportionen.

---

§. 35.

I. Lehrsatz:

Jede geometrische Proportion läßt sich durch nachstehende Formel ausdrücken:

$$a : am = b : bm.$$

Beweis:

1) Zwei gleiche übereinstimmige Verhältnisse (§. 33. Zus. II. und II. §. 51.) geben, mit einander verglichen, die geometrische Proportion;

2) Man bezeichne die beiden Vorderglieder einer jeden solchen Proportion mit a und b, und den Exponenten, der in beiden Verhältnissen die nämliche Größe sein muß, mit m;

3) Man erhält allemal dadurch das Hinterglied des geometrischen Verhältnisses, daß man das Vorderglied mit dem Exponenten multiplizirt (§. 33. Zus. I.); ist also das Hinterglied des ersten Verhältnisses gleich $a \times m = am$, und das des zweiten Verhältnisses gleich $b \times m = bm$, und daher das erste Verhältniß einer solchen Proportion allgemein durch $a : am$, und das zweite durch $b : bm$ ausgedrückt;

4) Diese beiden Verhältnisse sind, weil m auch beiderseits mit dem nämlichen Zeichen vorkommen muß,

gleich und übereinstimmig, indem am dividirt durch a gleich m, und bm dividirt durch b ebenfalls gleich m ist; um deßwillen ist durch $a : am = b : bm$ allgemein jede geometrische Proportion ausgedrückt.

Ist z. B. $a = 6$, dann $b = 5$, und $m = 3$, so ist $am = 6 \times 3 = 18$, ferner $bm = 5 \times 3 = 15$, und man hat die geometrische Proportion $6 : 6 \times 3 = 5 : 5 \times 3$, oder $6 : 18 = 5 : 15$, wo $^{18}/_{6} = {}^{15}/_{5} = 3$.

I. Zusatz: Jede stättige geometrische Proportion kann durch die Formel $a : am = am : am^2$ ausgedrückt werden, oder kürzer, weil das mittlere Glied am, welches zweimal vorkömmt, nur einmal geschrieben wird, durch $a : am : am^2$.

In der stättigen Proportion müssen die beiden mittleren Glieder am und b einander gleich sein (II. §. 52. d.); substituirt man nun in der allgemein giltigen Formel anstatt b den gleichen Ausdruck am, so erhält man die angegebene Formel für jede stättige geometrische Proportion, wie aus Nachstehendem ersichtlich ist:

$$a : am = b : bm,$$
$$b = am,$$

also $a : am = am : am \times m$,

$$a : am = am : am^2,$$
$$a : am : am^2.$$

Ist z. B. $a = 5$, und $m = 3$, so ist $am = 5 \times 3 = 15$, und $am^2 = 5 \times 3^2 = 45$; um deßwillen bekömmt man die stättige geometrische Proportion $5 : 5 \times 3 : 5 \times 3^2$, oder $5 : 15 : 45$, wo $^{15}/_{5} = {}^{45}/_{15} = 3$.

II. Zusatz: Ist in einer geometrischen Proportion, welche allgemein durch $a : am = b : bm$ ausgedrückt wird, das erste Glied dem zweiten gleich, oder ist es größer oder kleiner als das zweite, so ist auch das dritte Glied dem vierten gleich, oder es ist größer oder kleiner als das vierte (II. §. 56. b.); d. h., 1) wenn $a = am$, so ist $b = bm$, 2) wenn $a > am$, so ist $b > bm$, 3) wenn $a < am$, so ist $b < bm$.

1) Wenn $a = am$, so ist am dividirt durch a gleich 1, und somit $m = 1$, weil dann a und am die nämliche Größe bezeichnen, und jede Größe sich selbst gleich ist (I. §. 10. Nro. 1.); ferner Gleiches mit Gleichem multiplizirt gibt Gleiches (I. §. 46. I.), daher ist auch $bm = b$, oder $b = bm$, d. h., wenn das erste Glied dem zweiten gleich ist, so ist auch das dritte dem vierten gleich;

2) Wenn $a > am$, so ist der Exponent m ein ächter Bruch, mithin $m < 1$, weil von der größeren Zahl nur ein Theil genommen werden darf, um die kleinere zu erhalten; wenn man nun m und 1 mit b multiplizirt, so erhält man bm zum kleineren Produkte (I. §. 46. III.), und b ist daher $> bm$, d. h., wenn das erste Glied größer ist als das zweite, so ist auch das dritte Glied größer als das vierte;

3) Wenn endlich $a < am$, so ist der Exponent m ein solcher unächter Bruch, dessen Zähler größer ist, als der Nenner, also $m > 1$; multiplizirt man nun wieder beide Größen mit b, so ist $bm > b$, oder $b < bm$, d. h., wenn das erste Glied kleiner ist als das zweite, so ist auch das dritte Glied kleiner als das vierte.

In Absicht auf diese drei Fälle kann der Beweis nach den im I. Thl. im §. 46. und §. 62. aufgestellten Grundsätzen der Multiplikation und Division auch auf folgende Weise geführt werden:

	1)	2)	3)
	$a = am$	$a > am$	$a < am$
	$a = a$	$a = a$	$a = a$
also	$1 = m$,	$1 > m$,	$1 < m$,
ferner	$b = b$	$b = b$	$b = b$
mithin	$b = bm$;	$b > bm$;	$b < bm$.

Wenn ich z. B. die Proportionen habe $4 : 4 = 8 : 8$, dann $8 : 2 = 16 : 4$, und $3 : 6 = 5 : 10$, so ist $4 = 4$ und $8 = 8$, dann $8 > 2$ und $16 > 4$, endlich $3 < 6$ und $5 < 10$.

III. Zusatz: Sind die Vorderglieder gleich, so sind es auch die Hinterglieder, und wenn das erste Glied größer oder kleiner ist als das dritte, so ist auch das zweite Glied größer oder kleiner als das

vierte; d. h., 1) wenn $a = b$, so ist $am = bm$, 2) wenn $a > b$, so ist $am > bm$, und 3) wenn $a < b$, so ist $am < bm$, was aus Nachstehendem nach dem im I. Thl. §. 46. aufgestellten I. und III. Grundsatze ersichtlich ist:

1) $a = b$	2) $a > b$	3) $a < b$
$m = m$	$m = m$	$m = m$
also $am = bm$;	$am > bm$;	$am < bm$.

Wenn ich z. B. die Proportionen habe $2 : 4 = 2 : 4$, dann $8 : 16 = 6 : 12$, und $5 : 10 = 14 : 28$, so ist $2 = 2$ und $4 = 4$, dann $8 > 6$ und $16 > 12$, endlich $5 < 14$ und $10 < 28$.

IV. Zusatz: In jeder geometrischen dißkreten Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder dem Produkte der mittleren gleich.

Eine jede solche Proportion wird allgemein durch die Formel $a : am = b : bm$ ausgedrückt, und hier ist offenbar, weil Gleiches mit Gleichem multiplizirt Gleiches gibt, und im Produkte die Stellen der Faktoren verwechselt werden dürfen, das Produkt $a \times bm$ gleich dem Produkte $am \times b$, oder $abm = amb$; z. B. $5 : 10 = 6 : 12$, daher ist $5 \times 12 = 10 \times 6 = 60$.

V. Zusatz: In jeder geometrischen stättigen Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder dem Quadrate des mittleren gleich, weil eine solche Proportion ausgedrückt wird durch $a : am : am^2$, und hier offenbar nach den im III. Thl. §. 53. Lehrs. VI. Zus. I. und §. 71. aufgestellten Regeln $a \times am^2 = (am)^2 = a^2m^2$.

Hat man z. B. die stättige Proportion $4 : 8 : 16$, so ist $4 \times 16 = 8^2 = 64$.

VI. Zusatz: Wenn das Produkt zweier Zahlen dem Produkte zweier anderen gleich ist, so erhält man eine geometrische Proportion, wenn man die Faktoren des einen Produktes zu äußeren, und die des anderen Produktes zu mittleren Gliedern nimmt; d. h., wenn $ad = bc$, so verhält sich $a : b = c : d$, oder auch $b : a = d : c$.

Nach der Voraussetzung ist $ad = bc$; dividirt man nun die beiden Glieder dieser Gleichung mit a, und auch mit c, so erhält man $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$, d. h., die Zahl a ist in b so oft enthalten, wie c in d, und die Proportion $a : b = c : d$ ist richtig: dividirt man ferner die Gleichung $ad = bc$ mit d, und auch mit b, so erhält man $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, d. h., die Zahl b ist in a so oft enthalten, wie d in c, und die Proportion $b : a = d : c$ ist richtig (I. §. 62. 1.).

Wenn demnach die vier Glieder einer angeblichen Proportion so beschaffen sind, daß das Produkt der äußeren Glieder dem Produkte der mittleren Glieder gleich ist, so ist die Proportion wahr, weil dann die Faktoren des einen Produktes die äußeren, und die des anderen die mittleren Glieder der Proportion bilden; d. h., aus der Gleichheit der Produkte der äußeren und mittleren Glieder kann man bei vier in Gestalt einer Proportion angesetzten Zahlen auf die Richtigkeit der Proportion schließen.

Man kann also aus zwei Kennzeichen die Richtigkeit einer Proportion erkennen, nämlich aus der Gleichheit der Produkte der äußeren und mittleren Glieder, und auch daher, daß die beiden Verhältnisse gleich sind, und somit gleiche Exponenten haben.

Wenn z. B. $2 \times 16 = 4 \times 8$, so verhält sich $2 : 4 = 8 : 16$, oder auch $4 : 2 = 16 : 8$, weil offenbar $4/2 = 16/8 = 2$, und $2/4 = 8/16 = 1/2$.

Eben so ist z. B. die Proportion $5 : 10 = 7 : 14$ wahr und richtig, weil $5 \times 14 = 10 \times 7 = 70$, und deßhalb auch $10/5 = 14/7 = 2$.

VII. Zusatz: Wenn das Produkt zweier Zahlen dem Quadrate einer anderen Zahl gleich ist, so ist die Quadratwurzel dieses Quadrates die mittlere geometrische Proportionalzahl zu den beiden ersteren; d. h., wenn $ac = b^2$, so verhält sich $a : b : c$, oder auch $c : b : a$.

Nach der Voraussetzung ist $ac = b^2$, und $b^2 = b \times b$, daher ist $ac = b \times b$, und es verhält

sich in Gemäßheit des vorigen Zusatzes $a : b = b : c$, oder auch $c : b = b : a$, und kürzer $a : b : c$, oder $c : b : a$.

Wenn z. B. $3 \times 12 = 6^2$, so verhält sich $3 : 6 : 12$, oder auch $12 : 6 : 3$, weil $6/3 = 12/6 = 2$, und $6/12 = 3/6 = 1/2$.

VIII. Zusatz: Wenn in einer geometrischen Proportion die beiden ersten Glieder gleiche Zeichen haben, so müssen auch die beiden letzten Glieder gleiche Zeichen haben: und wenn die Zeichen bei jenen verschieden sind, so sind sie es auch bei diesen.

Wen die beiden ersten Glieder a und am gleiche Zeichen haben, somit beide positiv, oder beide negativ sind, so bekömmt der Exponent das Zeichen †, da bei der Division gleiche Zeichen im Quotienten das Zeichen † geben (III. §. 57. a.); der Exponent des zweiten Verhältnisses muß mit dem Exponenten des ersten Verhältnisses gleich sein, und zugleich mit ihm das nämliche Zeichen † haben, weil in der geometrischen Proportion die beiden Verhältnisse gleich und übereinstimmig sind; um deßwillen müssen auch die beiden letzten Glieder gleiche Zeichen haben.

Sind hingegen die beiden ersten Glieder entgegengesetzte Größen, so sind es auch die beiden letzten Glieder, weil dann der Exponent des ersten Verhältnisses das Zeichen — hat, und der des zweiten Verhältnisses auch das Zeichen — haben muß, was nur dann möglich ist, wenn auch die beiden letzten Glieder verschiedene Zeichen haben (III. §. 57. b.).

So verhält sich z. B. † 2 : † 4 = † 6 : † 12, und † 2 : — 4 = † 6 : — 12.

IX. Zusatz: Wenn die beiden Vorderglieder einerlei Zeichen haben, so müssen auch die beiden Hinterglieder gleiche Zeichen haben, und wenn erstere entgegengesetzte Größen sind, so müssen es die letzteren auch sein; weil gleiche Zeichen bei der Division †, und ungleiche das Zeichen — geben, und zugleich in der geometrischen Proportion, damit die beiden Verhältnisse gleich und übereinstimmig sind, die beiden Exponenten gleiche und übereinstimmige Größen sein müssen.

So verhält sich z. B. † 2 : — 4 = † 6 : — 12, und † 2 : † 4 = — 6 : — 12.

Anmerkung: 1) Nach dem IV. und V. Zusatze lassen sich allemal die geometrischen Proportionen in Gleichungen, und nach dem VI. und VII. Zusatze kann man Gleichungen in geometrische Proportionen verwandeln.

2) Vermöge der beiden letzten Zusätze dieses §. lassen sich die Zeichen der Glieder, im Falle es nothwendig ist, leicht bestimmen; um deßwillen wird in der Folge darauf keine Rücksicht mehr genommen. Zugleich verstehe ich von nun an unter dem Ausdrucke „gleiche geometrische Verhältnisse“ allemal solche, die nicht nur gleich, sondern auch übereinstimmig sind, bei welchen somit die beiden gleichen Exponenten auch das nämliche Zeichen haben, und gleiche übereinstimmige Größen sind.

3) Auf eine ähnliche Weise rede ich von nun an, im Falle nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, allemal dadurch von geometrischen Verhältnissen, und geometrischen Proportionen, daß ich bloß sage „Verhältniß oder Proportion“ (II. §. 55. Anm. 3.).

§. 36.

I. Aufgabe, zu drei Zahlen die vierte Proportionalzahl zu finden.

Auflösung:

1) Weil nebst den drei Zahlen auch die Ordnung bekannt sein muß, nach welcher sie als Glieder in der Proportion vorkommen, so schreibe man x an die Stelle des fehlenden Gliedes, um dadurch die unbekannte Größe zu bezeichnen;

2) Man bilde sich aus der Proportion eine Gleichung, indem man das Produkt der äußeren Glieder dem Produkte der mittleren gleich setzt (§. 35. Zus. IV.);

3) In der Gleichung suche man nach dem im III. Thl. §. 98. aufgestellten Regeln die unbekannte Größe x;

4) Zur Probe setze man in der Proportion die gefundene Zahl, und es wird, im Falle die Auflösung richtig ist, wirklich die vierte Proportionalzahl gefunden sein, was man daraus erkennt, daß die beiden Verhältnisse einander gleich sind, während zugleich

das Produkt dee äußeren Glieder dem der mittleren gleich ist.

I. Beispiel:

Man soll zu den Zahlen 2, dann 4 und 8 die vierte Proportionalzahl suchen, wenn zugleich bekannt ist, daß 2 das erste, 4 das zweite, 8 das dritte, und die gesuchte Größe x das vierte Glied der Proportion bildet.

Auflösung:

1) Den hier gesetzten Bedingungen gemäß hat man nachstehende Proportion:

$$2 : 4 = 8 : x;$$

2) Man bilde sich auf die angezeigte Weise die Gleichung, suche da x, und setze dann in der Proportion anstatt x die gefundene Zahl:

$$2 : 4 = 8 : x,$$

also $2x = 4 \times 8$, und

$$x = \frac{4 \times 8}{2} = {}^{32}/_{2} = 16,$$

daher $2 : 4 = 8 : 16;$

3) Die Zahl 16 ist wirklich die gesuchte vierte Proportionalzahl, weil ${}^{4}/_{2} = {}^{16}/_{8} = 2$, und zugleich $2 \times 16 = 4 \times 8 = 32$.

II. Beispiel:

Man soll zu den Zahlen 5, dann 10 und 18 eine vierte Zahl finden, die das dritte Glied der Proportion ist, während 5 das erste, 10 das zweite, und 18 das vierte Glied der Proportion ist.

Auflösung:

1) Der Voraussetzung gemäß hat man folgende Proportion:

$$5 : 10 = x : 18;$$

2) Diese Proportion verwandle man in eine Gleichung, suche da x, und setze in der Proportion anstatt x die gefundene Zahl:

$$5 : 10 = x : 18,$$

also $5 \times 18 = 10x,$

$$\frac{5 \times 18}{10} = x, \text{ oder}$$

$$x = {}^{90}/_{10} = 9;$$

daher $5 : 10 = 9 : 18;$

3) Die Zahl 9 ist wirklich die gesuchte Zahl, weil ${}^{10}/_{5} = {}^{18}/_{9} = 2$, und zugleich $5 \times 18 = 10 \times 9 = 90$.

Zusatz: Fehlt in der dißkreten Proportion eines der äußeren Glieder, und man drückt das bekannte äußere Glied mit a, das unbekannte mit x, und die mittleren Glieder durch b und c aus, so verhält sich $a : b = c : x$, oder $x : b = c : a$; daher ist $ax = bc$, und $x = \frac{bc}{a}$.

Fehlt aber eines der mittleren Glieder, und man drückt das bekannte mittlere Glied durch b, das unbekannte durch x, und die äußeren Glieder durch a und d aus, so verhält sich $a : b = x : d$, oder $a : x = b : d$; daher ist $bx = ad$, und $x = \frac{ad}{b}$.

Dadurch sind auf eine ähnliche Weise, wie bei den dißkreten arithmetischen Proportionen (§. 25. Zus.) die im II. Thl. §. 55. angegebenen Regeln als allgemein giltig erwiesen.

§. 37.

II. Aufgabe, zu zwei gegebenen Zahlen die dritte Proportionalzahl zu suchen.

Auflösung:

1) Man setze die gegebenen Zahlen so als Glieder einer stättigen Proportion an, wie ihre Ordnung durch die Aufgabe bestimmt ist;

2) An die Stelle des fehlenden Gliedes setze man x, und bilde sich nach §. 35. Zus. V. die Gleichung, in welcher x gesucht wird, während dann

in der Proportion anstatt x die gefundene Zahl gesetzt wird.

I. Beispiel:

Man soll zu den Zahlen 4 und 8 die dritte Proportionalzahl finden, wenn 4 das erste, 8 das zweite, und x das dritte Glied der Proportion bildet.

Auflösung:

1) Nach den Bedingungen hat man diese stättige Proportion:

$$4 : 8 : x;$$

2) Die Proportion verwandle man in eine Gleichung, suche da x, und setze in der Proportion anstatt x die gefundene Zahl:

$$4 : 8 : x,$$

also $4x = 8^2$, und

$$x = \frac{8^2}{4} = {}^{64}/_4 = 16,$$

daher $4 : 8 : 16;$

3) Die Zahl 16 ist wirklich die gesuchte Proportionalzahl, weil $^8/_4 = {}^{16}/_8 = 2$, und $4 \times 16 = 8^2 = 64$.

II. Beispiel:

Man suche zu 5 und 20 die mittlere Proportionalzahl.

Auflösung:

1) Hier bildet x das mittlere Glied in der nachstehenden stättigen Proportion:

$$5 : x : 20:$$

2) Man bilde die Gleichung, suche da x, und setze anstatt x die gefundene Zahl in der Proportion:

$$5 : x : 20,$$

also $5 \times 20 = x^2$, und

$$\sqrt{(5 \times 20)} = x, \text{ oder}$$

$$x = \sqrt{(5 \times 20)} = \sqrt{100} = 10,$$

daher $5 : 10 : 20;$

3) Zur Probe findet man, daß $^{10}/_{5} = {^{20}/_{10}} = 2$, und $5 \times 20 = 10^2 = 100$.

Zusatz: Bei der stättigen Proportion kann dem Gesagten gemäß das fehlende Glied auf nachstehende Weise allgemein gefunden werden:

Fehlt in einer solchen Proportion eines der äußeren Glieder, und man drückt das bekannte äußere Glied durch a, das unbekannte durch x, und das mittlere durch b aus, so verhält sich $a : b : x$, oder $x : b : a$; daher ist $ax = b^2$, und $x = \frac{b^2}{a}$, d. h., man erhält in der stättigen Proportion das unbekannte äußere Glied, wenn man das Quadrat des mittleren mit dem bekannten äußeren dividirt (III. §. 42. Beisp. I.).

Fehlt aber das mittlere Glied, und man drückt dieses durch x, und die äußeren durch a und c aus, so verhält sich $a : x : c$, oder $c : x : a$; daher ist $x^2 = ac$, und $x = \sqrt{ac}$, d. h., man erhält das mittlere Glied der stättigen Proportion, wenn man aus dem Produkte der äußeren Glieder die Quadratwurzel auszieht (III. §. 42. Beisp. I.).

Anmerkung: In Absicht auf die diskreten Proportionen kommen im II. Thl. im §. 55. einige Beispiele vor.

§. 38.

II. Lehrsatz:

In jeder Proportion lassen sich die mittleren und äußeren Glieder verwechseln, und beide Verhältnisse umkehren, ohne daß die Gleichheit der Verhältnisse aufgehoben wird.

Beweis:

1) Jede Proportion wird in Gemäßheit des im §. 35. aufgestellten I. Lehrsatzes durch die Formel $a : am = b : bm$ ausgedrückt; durch die Verwechselung der mittleren Glieder (alternando) erhält man $a : b = am : bm$, und durch die Verwechselung der äußeren Glieder (permutando) bekömmt man $bm : am = b : a$;

2) Diese letzteren Formeln drücken auch wieder Proportionen aus, weil in beiden gleiche Exponenten sind (III. §. 66. d.), nämlich $\frac{b}{a} = \frac{bm}{am}$, und $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$, weßhalb auch die Verhältnisse gleich sind;

3) Durch das Umkehren beider Verhältnisse (invertendo) erhält man aus a : am = b : bm die Formel am : a = bm : b, und in dieser sind die Exponenten wieder gleich, nämlich $\frac{a}{am} = \frac{b}{bm} = \frac{1}{m}$.

Ich werde in der Folge die Beweise in Absicht auf die bei den Proportionen vorzunehmenden Veränderungen kürzer auf folgende Weise führen:

a : am = b : bm, (§. 35. Lehrs. I.)

alternando a : b = am : bm, weil $\frac{b}{a} = \frac{bm}{am}$;

permutando bm : am = b : a, da $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$;

invertendo am : a = bm : b, da $\frac{a}{am} = \frac{b}{bm} = \frac{1}{m}$.

Beispiel:

2 : 4 = 8 : 16

alternando 2 : 8 = 4 : 16, weil 8/2 = 16/4 = 4;
permutando 16 : 4 = 8 : 2, weil 4/16 = 2/8 = 1/4;
invertendo 4 : 2 = 16 : 8, da 2/4 = 8/16 = 1/2.

§. 39.

III. Lehrsatz:

In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Be-

Beweis:

$a : aq = b : bq$, (§. 44. Anmerk. 2.)

1) Addendo antecedentes et consequentes
$$\left.\begin{array}{l} a + b : aq + bq = a : aq, \\ a + b : aq + bq = b : bq, \end{array}\right.$$

weil $\frac{aq + bq}{a + b} = \frac{aq}{a} = q$, und $\frac{aq + bq}{a + b} = \frac{bq}{b} = q$;

2) Subtrahendo, vel differentiando
$$\left.\begin{array}{l} a - b : aq - bq = a : aq, \\ a - b : aq - bq = b : bq, \end{array}\right.$$

weil $\frac{aq - bq}{a - b} = \frac{aq}{a} = q$, und $\frac{aq - bq}{a - b} = \frac{bq}{b} = q$.

Beispiel:

$2 : 4 = 8 : 16$,

1) Addendo $2 + 8 : 4 + 16 = 2 : 4$,
$2 + 8 : 4 + 16 = 8 : 16$,

oder $10 : 20 = 2 : 4$, weil $^{20}/_{10} = {}^{4}/_{2} = 2$,
$10 : 20 = 8 : 16$, da $^{20}/_{10} = {}^{16}/_{8} = 2$;

2) Subtrahendo $2 - 8 : 4 - 16 = 2 : 4$,
$2 - 8 : 4 - 16 = 8 : 16$,

oder $-6 : -12 = 2 : 4$, da $\frac{-12}{-6} = {}^{4}/_{2} = 2$,

$-6 : -12 = 8 : 16$, weil $\frac{-12}{-6} = {}^{16}/_{8} = 2$.

I. Zusatz: In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zur Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder, wie ein Paar homologer Glieder (II. §. 52. c.); denn

$a : aq = b : bq$,

1) $a + aq : b + bq = a : b$,
$a + aq : b + bq = aq : bq$,

weil $\frac{b + bq}{a + aq} = \frac{b(1 + q)}{a(1 + q)} = \frac{b}{a}$, und $\frac{b + bq}{a + aq} = \frac{bq}{aq} = \frac{b}{a}$;

2) $a - aq : b - bq = a : b$,
$a - aq : b - bq = aq : bq$,

weil $\frac{b - bq}{a - aq} = \frac{b(1-q)}{a(1-q)} = \frac{b}{a}$, und $\frac{b - bq}{a - aq} = \frac{bq}{aq} = \frac{b}{a}$.

Beispiel:

$2 : 4 = 8 : 16$,

1) $2 + 4 : 8 + 16 = 2 : 8$,
2) $2 - 4 : 8 - 16 = 4 : 16$,

oder $6 : 24 = 2 : 8$, da $^{24}/_{6} = {}^{8}/_{2} = 4$,

$-2 : -8 = 4 : 16$, weil $\frac{-8}{-2} = {}^{16}/_{4} = 4$.

II. Zusatz: Wenn mehrere Verhältnisse einander gleich sind, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede; d. h., wenn $a : b = c : d = e : f = g : h$, so verhält sich $(a + c + e + g) : (b + d + f + h) = a : b = c : d$ u. s. f.; denn

$a : b = c : d$
also $a + c : b + d = c : d$ (Lehrsatz),
und $c : d = e : f$,
daher $a + c : b + d = e : f$,
mithin $(a + c + e) : (b + d + f) = e : f$,
und $e : f = g : h$,
also $(a + c + e) : (b + d + f) = g : h$,
mithin $(a + c + e + g) : (b + d + f + h) = g : h$.

Beispiel:

Es verhält sich $2 : 4 = 8 : 16 = 1 : 2 = 5 : 10$, daher auch $(2 + 8 + 1 + 5) : (4 + 16 + 2 + 10) = 2 : 4$, oder $16 : 32 = 2 : 4 = 8 : 16 = 1 : 2 = 5 : 10$.

§. 40.

Aufgabe, eine gegebene Zahl B in drei Theile x, y und z zu theilen, die sich zu

einander verhalten, wie die gegebenen Zahlen a, b und c.

Auflösung:

1) Man addire die gegebenen Verhältnißzahlen a, b und c;

2) Man setze folgende Proportionen an: die Summe der Verhältnißzahlen verhält sich zur gegebenen Zahl B, wie jede Verhältnißzahl zu dem ihr entsprechenden Theile, d. h.,

$$a + b + c : B = a : x,$$
$$a + b + c : B = b : y,$$
$$a + b + c : B = c : z,$$

3) In diesen Proportionen bestimme man nach §. 36. die gesuchten Theile x, y und z.

Beweis:

1) Die gesuchten Theile müssen sich kraft dieser Aufgabe wie die gegebenen Verhältnißzahlen verhalten, man bekömmt deßhalb nachstehende zwei Proportionen:

$$a : b = x : y,$$
$$b : c = y : z.$$

2) Man verwechsle die mittleren Glieder (§. 38.), und man wird sehen, daß alle drei Verhältnisse einander gleich sind:

$$a : b = x : y,$$
$$\underline{b : c = y : z,}$$
$$\text{daher auch}\quad a : x = b : y,$$
$$\underline{b : y = c : z,}$$
$$\text{mithin}\quad a : x = b : y = c : z;$$

3) Weil diese drei Verhältnisse einander gleich sind, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede (§. 39. Zus. II.):

$$\underline{a : x = b : y = c : z,}$$
$$\text{daher}\quad a + b + c : x + y + z = a : x,$$
$$a + b + c : x + y + z = b : y,$$
$$a + b + c : x + y + z = c : z;$$

4) Die Zahl B wird in die drei Theile x, y und z

getheilt, und alle Theile zusammen geben wieder das Ganze (I. §. 10. Nro. 2.), also ist $B = x + y + z$; setzt man nun B anstatt $x + y + z$, so erhält man nach der aufgestellten Regel die drei erwähnten Proportionen, nämlich

$$a + b + c : B = a : x,$$
$$a + b + c : B = b : y,$$
$$a + b + c : B = c : z.$$

Beispiel:

Man soll die Zahl 3240 in drei solche Theile theilen, die sich zu einander verhalten wie die drei Zahlen 2, 3, 4.

Auflösung:

1) Man addire die drei Verhältnißzahlen, man erhält zur Summe 9, weil $2 + 3 + 4 = 9$;

2) Man setze nach der aufgestellten Regel die Proportionen an, und bestimme in ihnen die gesuchten Theile:

a) $9 : 3240 = 2 : x$,

$$\text{daher } x = \frac{3240 \times 2}{9} = 720;$$

b) $9 : 3240 = 3 : y$,

$$\text{daher } y = \frac{3240 \times 3}{9} = 1080;$$

c) $9 : 3240 = 4 : z$,

$$\text{mithin } z = \frac{3240 \times 4}{9} = 1440;$$

3) Zur Probe addire man die drei gefundenen Zahlen, ihre Summe muß wieder die Zahl 3240 geben:

a) $x = 720$,
b) $y = 1080$,
c) $z = 1440$,

daher $x + y + z = 3240$.

I. Zusatz: Auf eine ähnliche Weise kann man jede Zahl nach gegebenen Verhältnißzahlen in eine beliebige Anzahl Theile theilen.

II. Zusatz: Weil bei solchen Aufgaben so viele

verschiedene Gleichungen gebildet werden können, als unbekannte Größen gesucht werden, so können diese letzteren auch nach §. 16. gefunden werden.

Sind z. B. drei Proporzionalzahlen zu suchen, so hat man den gesetzten Bedingungen gemäß nachstehende zwei Proportionen, aus welchen die beigesetzten Gleichungen gebildet werden können, denen noch die dritte nach dem Grundsatze beigefügt wird „alle Theile zusammen geben das Ganze“:

$$a : b = x : y,$$
$$b : c = y : z,$$

daher $ay = bx$,
$bz = cy$,
ferner $x + y + z = B$.

§. 41.

IV. Lehrsatz:

Wenn man in einer Proportion ein oder beide Verhältnisse, oder ein oder jedes Paar homologer Glieder mit der nämlichen, beliebig angenommenen Zahl multiplizirt, oder dividirt, so stehen die Produkte und Quotienten noch in einer Proportion zu einander.

Beweis:

$$a : aq = b : bq;$$

a) Durch die Multiplikation mit den Zahlen m und n (multiplicando):

1) $am : amq = b : bq$, weil $\frac{amq}{am} = \frac{bq}{b} = q$,

2) $a : aq = bm : bmq$, weil $\frac{aq}{a} = \frac{bmq}{bm} = q$,

3) $am : amq = bn : bnq$, weil $\frac{amq}{am} = \frac{bnq}{bn} = q$,

4) $am : amq = bm : bmq$, weil $\frac{amq}{am} = \frac{bmq}{bm} = q$,

5) $am : aq = bm : bq$, weil $\frac{aq}{am} = \frac{bq}{bm} = \frac{q}{m}$,

6) $a : amq = b : bmq$, weil $\frac{amq}{a} = \frac{bmq}{b} = mq$,

7) $am : anq = bm : bnq$, weil $\frac{anq}{am} = \frac{bnq}{bm} = \frac{nq}{m}$,

8) $am : amq = bm : bmq$, weil $\frac{amq}{am} = \frac{bmq}{bm} = q$;

b) Durch die Division mit den Zahlen m und n (dividendo):

9) $\frac{a}{m} : \frac{aq}{m} = b : bq$, weil $\frac{aq}{m} : \frac{a}{m} = \frac{amq}{am} = q$

und $\frac{bq}{b} = q$,

10) $a : aq = \frac{b}{m} : \frac{bq}{m}$, weil $\frac{aq}{a} = \frac{bq}{m} : \frac{b}{m}$

$= \frac{bmq}{bm} = q$,

11) $\frac{a}{m} : \frac{aq}{m} = \frac{b}{n} : \frac{bq}{n}$, weil $\frac{aq}{m} : \frac{a}{m} = \frac{amq}{am} = q$,

und $\frac{bq}{n} : \frac{b}{n} = \frac{bnq}{bn} = q$,

12) $\frac{a}{m} : \frac{aq}{m} = \frac{b}{m} : \frac{bq}{m}$, weil $\frac{aq}{m} : \frac{a}{m} = \frac{amq}{am} = q$,

und $\frac{bq}{m} : \frac{b}{m} = \frac{bmq}{bm} = q$,

---

13) $\frac{a}{m} : aq = \frac{b}{m} : bq$, weil $aq : \frac{a}{m} = \frac{amq}{a} = mq$,

und $bq : \frac{b}{m} = \frac{bmq}{b} = mq$,

14) $a : \frac{aq}{m} = b : \frac{bq}{m}$, weil $\frac{aq}{m} : a = \frac{q}{m}$, und

$\frac{bq}{m} : b = \frac{q}{m}$,

15) $\frac{a}{m} : \frac{aq}{n} = \frac{b}{m} : \frac{bq}{n}$, weil $\frac{aq}{n} : \frac{a}{m} = \frac{amq}{an} = \frac{mq}{n}$,

und $\frac{bq}{n} : \frac{b}{m} = \frac{bmq}{bn} = \frac{mq}{n}$,

16) $\frac{a}{m} : \frac{aq}{m} = \frac{b}{m} : \frac{bq}{m}$, weil $\frac{aq}{m} : \frac{a}{m} = \frac{amq}{am} = q$,

und $\frac{bq}{m} : \frac{b}{m} = \frac{bmq}{bm} = q$.

Diese 16 Veränderungen können durch Multiplikation und Division vorgenommen werden, und die Exponenten der Verhältnisse bleiben immer die nämlichen, es mögen die Buchstaben m und n ganze oder gebrochene, Rational- oder Irrationalzahlen sein, wie man dieses aus den jedes Mal beigefügten Exponenten offenbar ersieht.

Beispiel:

$4 : 8 = 16 : 32$,

a) Durch Multiplikation mit 2 und 3:

1) $8 : 16 = 16 : 32$, weil $16/8 = 32/16 = 2$,
2) $4 : 8 = 32 : 64$, weil $8/4 = 64/32 = 2$,
3) $8 : 16 = 48 : 96$, weil $16/8 = 96/48 = 2$,
4) $8 : 16 = 32 : 64$, weil $16/8 = 64/32 = 2$;

5) $8 : 8 = 32 : 32$, weil $8/8 = 32/32 = 1$,
6) $4 : 16 = 16 : 64$, weil $16/4 = 64/16 = 4$,
7) $8 : 24 = 32 : 96$, weil $24/8 = 96/32 = 3$,
8) $8 : 16 = 32 : 64$, weil $16/8 = 64/32 = 2$,

b) Durch Division mit 2 und 4:

9) $2 : 4 = 16 : 32$, weil $4/2 = 32/16 = 2$,
10) $4 : 8 = 8 : 16$, weil $8/4 = 16/8 = 2$,
11) $2 : 4 = 4 : 8$, weil $4/2 = 8/4 = 2$,
12) $2 : 4 = 8 : 16$, weil $4/2 = 16/8 = 2$;

13) $2 : 8 = 8 : 32$, weil $8/2 = 32/8 = 4$,
14) $4 : 4 = 16 : 16$, weil $4/4 = 16/16 = 1$,
15) $2 : 2 = 8 : 8$, weil $2/2 = 8/8 = 1$,
16) $2 : 4 = 8 : 16$, weil $4/2 = 16/8 = 2$.

Anmerkung: Man hätte die Richtigkeit der Proportion jedes Mal auch aus der Gleichheit der Produkte der äu-

ßeren und inneren Glieder zeigen können (§. 35. Zus. VI.); es ist aber einleuchtender, wenn man es aus der Gleichheit der Exponenten beweiset, weil man dann gleich unmittelbar sieht, daß die erste Zahl so und so oft in der zweiten enthalten ist, wie die dritte in der vierten.

§. 42.

V. Lehrsatz:

Wenn man bei einer Proportion alle Glieder zur nämlichen Würde erhebt, oder aus allen die nämliche Wurzel auszieht, so bilden die Potenzen und Wurzeln wieder eine Proportion; d. h., wenn vier Zahlen proportionirt sind, so sind es auch ihre Potenzen und Wurzeln von einerlei Grade.

Beweis:

$$a : aq = b : bq,$$

a) elevando ad potentiam $\left\{ a^m : a^m q^m = b^m : b^m q^m, \right.$

weil $\dfrac{a^m q^m}{a^m} = \dfrac{b^m q^m}{b^m} = q^m$;

b) extrahendo radicem $\left\{ \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{b}\sqrt[n]{q}, \right.$

weil $\dfrac{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{q}}{\sqrt[n]{a}} = \dfrac{\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{q}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{q}$.

Es wird nämlich ein Produkt zu einer Würde erhoben, wenn man jeden Faktor dazu erhebt (III. §. 71.), und aus einem Produkte wird eine Wurzel ausgezogen, wenn man sie aus jedem Faktor auszieht (III. §. 71. Zus. I.).

Beispiel:

a) $2 : 4 = 3 : 6,$

elev. ad pot. $2^2 : 4^2 = 3^2 : 6^2,$

oder $4 : 16 = 9 : 36$, weil $16/4 = 36/9 = 4$;

b) $\underline{9 : 36 = 25 : 100}$,

extrah. rad. $\sqrt{9} : \sqrt{36} = \sqrt{25} : \sqrt{100}$,

oder $3 : 6 = 5 : 10$, weil $6/3 = 10/5 = 2$.

§. 43.

VI. Lehrsatz:

Wenn in zwei Proportionen zwei gemeinschaftliche Glieder sind, so stehen die übrigen ebenfalls in einer Proportion, es mögen die gemeinschaftlichen Glieder in dem nämlichen Verhältnisse vorkommen, oder homologe Glieder, oder endlich äußere oder mittlere Glieder sein.

Beweis:

1) Wenn die gemeinschaftlichen Glieder im nämlichen Verhältnisse vorkommen:

wenn $a : b = c : d$, so ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$,

und wenn $a : b = m : n$, so ist $\frac{b}{a} = \frac{m}{n}$,

---

also $c : d = m : n$, weil auch $\frac{d}{c} = \frac{m}{n}$.

Man sagt, um für die neue Proportion die Ordnung der Glieder zu bezeichnen, die übrigen Glieder seien zu einander ex aequo simpliciter proportionirt, d. h., ein Vorderglied verhält sich zu seinem Hintergliede, wie das andere Vorderglied zu seinem Hintergliede, da hier zwei Verhältnisse einem dritten, und deßhalb auch unter sich gleich sind (II. §. 50. c.).

2) Wenn die gemeinschaftlichen Glieder homolog sind:

wenn $a : b = c : d$,

und $a : m = c : n$,

---

so verhält sich $\left.\begin{matrix} a : c = b : d, \\ a : c = m : n, \end{matrix}\right\}$ §. 38.

---

mithin $b : d = m : n$, (Nro. 1.)

und $b : m = d : n$.

Man sagt, um die Ordnung der Glieder zu bestimmen, die übrigen Glieder seien ordinatim et ex aequo zu einander proportionirt;

3) Wenn die gemeinschaftlichen Glieder mittlere oder äußere Glieder sind:

wenn $a : b = c : d$, so ist $ad = bc$ } §. 35. Zus. IV.
und wenn $a : m = n : d$, so ist $ad = mn$ } I. §. 10. Nro. 4.

also $bc = mn$, und $b : m = n : c$,
oder $m : b = c : n$.

In diesem letzten Falle, wo die nämlichen Glieder wieder mittlere, oder äußere Glieder sind, sagt man, die übrigen Glieder seien perturbate et ex aequo zu einander proportionirt.

Beispiel:

1) $4 : 8 = 3 : 6$,
$4 : 8 = 5 : 10$,

also $3 : 6 = 5 : 10$, da $6/3 = 10/5 = 2$;

2) $4 : 12 = 2 : 6$,
$10 : 12 = 5 : 6$,

also $4 : 10 = 2 : 5$, da $10/4 = 5/2 = 2\frac{1}{2}$;

3) $4 : 2 = 12 : 6$,
$8 : 2 = 12 : 3$,

also $4 : 8 = 3 : 6$, da $8/4 = 6/3 = 2$.

Anmerkung: Bei jedem dieser drei Fälle kann man auf eine vierfache Weise die neue Proportion erhalten, weßhalb man eigentlich zwölf verschiedene Fälle hat, von welchen ich der Kürze wegen nur drei anführte, weil bei den übrigen die nämlichen Beweisgründe vorkommen. So bilden z. B. bei Nro. 1. die gemeinschaftlichen Glieder entweder in beiden Proportionen das erste oder zweite Verhältniß, oder in der obern Proportion das erste, und in der untern das zweite, oder oben das zweite und unten das erste Verhältniß.

§. 44.

VII. Lehrsatz:

Wenn man die Glieder zweier Proportionen der Ordnung nach mit einander multiplizirt, oder dividirt, so sind die

Produkte und Quotienten in der nämlichen Ordnung zu einander proportionirt.

Beweis:

1) Wenn $a : b = c : d$, so ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$,

und wenn $f : g = m : n$, so ist $\frac{g}{f} = \frac{n}{m}$,

also $af : bg = cm : dn$, und $\frac{bg}{af} = \frac{dn}{mc}$.

Die beiden Exponenten der neuen Proportion sind einander gleich, das ist, $\frac{bg}{af} = \frac{dn}{mc}$, weil in der ersten Proportion $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, und in der zweiten $\frac{g}{f} = \frac{n}{m}$, und Gleiches mit Gleichem multiplizirt Gleiches gibt (I. §. 46.), somit $\frac{b}{a} \times \frac{g}{f} = \frac{d}{c} \times \frac{n}{m}$, oder $\frac{bg}{af} = \frac{dn}{mc}$.

2) Wenn $a : b = c : d$, so ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$,

und wenn $f : g = m : n$, so ist $\frac{g}{f} = \frac{n}{m}$,

also $\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{c}{m} : \frac{d}{n}$, und $\frac{b}{a} : \frac{g}{f} = \frac{bf}{ag} = \frac{d}{c} : \frac{n}{m} = \frac{dm}{cn}$.

Die beiden Exponenten der neuen Proportion sind wieder einander gleich, d. h., $\frac{bf}{ag} = \frac{dm}{cn}$, weil in der ersten Proportion $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, und in der zweiten $\frac{g}{f} = \frac{n}{m}$, und Gleiches mit Gleichem dividirt Glei-

ches gibt (I. §. 62.), somit $\frac{b}{a} : \frac{g}{f} = \frac{bf}{ag} = \frac{d}{c} : \frac{n}{m} = \frac{dm}{cn}$.

Beispiel:

1) $2 : 4 = 8 : 16$,
$1 : 3 = 4 : 12$,

daher $2 \times 1 : 4 \times 3 = 8 \times 4 : 16 \times 12$,
oder $2 : 12 = 32 : 192$, weil $^{12}/_{2} = {}^{192}/_{32} = 6$;

2) $8 : 16 = 24 : 48$,
$2 : 4 = 8 : 16$,

mithin $^{8}/_{2} : {}^{16}/_{4} = {}^{24}/_{8} : {}^{48}/_{16}$,
oder $4 : 4 = 3 : 3$, da $^{4}/_{4} = {}^{3}/_{3} = 1$.

I. Zusatz: Wenn man die Glieder von drei oder mehreren Proportionen der Ordnung nach mit einander multiplizirt, so sind die Produkte in eben dieser Ordnung zu einander proportionirt; denn

wenn $a : b = c : d$, so ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$,

$e : f = g : h$, so ist $\frac{f}{e} = \frac{h}{g}$,

$m : n = o : p$, so ist $\frac{n}{m} = \frac{p}{o}$,

daher $aem : bfn = cgo : dhp$, da $\frac{bfn}{aem} = \frac{dhp}{cgo}$.

Was hier von drei Proportionen gesagt ist, gilt aus den nämlichen Gründen von wie immer vielen Proportionen.

Beispiel:

$1 : 2 = 3 : 6$,
$2 : 6 = 1 : 3$,
$5 : 10 = 4 : 8$,

also $(1 . 2 . 5) : (2 . 6 . 10) = (3 . 1 . 4) : (6 . 3 . 8)$,
oder $10 : 120 = 12 : 144$, da $^{120}/_{10} = {}^{144}/_{12} = 12$.

II. Zusatz: Wenn $a : b = m : n$, und $o : p = n : q$, so verhält sich auch nach dem Lehrsatze $ao : bp = mn : nq$, oder, wenn man das letzte Verhältniß mit n dividirt (§. 41), $ao : bp = m : q$; man sagt daher, das Verhältniß $m : q$ sei aus den beiden Verhältnissen $a : b$ und $o : p$ zusammengesetzt.

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} & 2 : 4 = 8 : 16, \\ & 3 : 6 = 16 : 32, \\ \hline \text{mithin} & 2 \times 3 : 4 \times 6 = 8 \times 16 : 16 \times 32, \\ \text{oder} & 6 : 24 = 8 : 32. \end{array}$$

Es ist also das Verhältniß $8 : 32$ ein aus den beiden Verhältnissen $2 : 4$ und $3 : 6$ zusammengesetztes Verhältniß (Ratio composita), weil die nämliche Zahl 16 in den zwei letzten Verhältnissen zugleich als Vorderglied und Hinterglied vorkömmt.

III. Zusatz: Wenn überhaupt mehrere Verhältnisse so beschaffen sind, daß immer das Hinterglied in einem Verhältnisse das Vorderglied im folgenden wird, so ist das Verhältniß des ersten Gliedes zum letzten aus allen diesen Verhältnissen zusammengesetzt; das ist, wenn z. B.

$$\begin{array}{ll} & a : b = c : x, \\ & d : f = x : y, \\ & m : n = y : z, \\ \hline \text{so ist} & adm : bfn = cxy : xyz \quad (\text{Zus. I.}), \\ \text{oder} & adm : bfn = c : z \quad (\text{§. 41. Lehrs. IV.}). \end{array}$$

Man sagt daher, das Verhältniß $c : z$ sei aus drei Verhältnissen zusammengesetzt.

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} & 200 : 6000 = 10 : y, \\ & 1 : 6 = y : z, \\ & 5 : 4 = z : x, \\ \hline \text{mithin} & (200 . 1 . 5) : (6000 . 6 . 4) = 10yz : yzx, \\ \text{oder} & 1000 : 144000 = 10 : x. \end{array}$$

Hier ist das Verhältniß $10 : x$ aus den drei Ver-

hältnissen 200 : 6000, dann 1 : 6, und 5 : 4 zusammengesetzt.

IV. Zusatz: Wenn man von den zwei gleichen stättigen Verhältnissen a : b, und b : c jedes dem ersten Verhältnisse a : b gleich setzt, und die beiden Proportionen mit einander multiplizirt, so erhält man das duplizirte Verhältniß (Lehrs.); zieht man überdieß in der neuen Proportion aus allen Gliedern die Quadratwurzel aus, so bekömmt man das subduplizirte Verhältniß; d. h., wenn

$$a : b = a : b,$$

und $$a : b = b : c,$$

dann ist $$a^2 : b^2 = ab : bc,$$
oder $$a^2 : b^2 = a : c,$$
und $$a : b = \sqrt{a} : \sqrt{c}.$$

Das Verhältniß a : c ist ein duplizirtes (Ratio duplicata), und das Verhältniß a : b ein subduplizirtes Verhältniß (Ratio subduplicata), weil $a : c = a^2 : b^2$, und $a : b = \sqrt{a} : \sqrt{c}$.

Beispiel:

$$2 : 4 = 6 : 12,$$
$$2 : 4 = 12 : 24,$$

also $$2^2 : 4^2 = 6 \times 12 : 12 \times 24,$$
oder $$2^2 : 4^2 = 6 : 24,$$
und $$2 : 4 = \sqrt{6} : \sqrt{24}.$$

Hier ist 6 : 24 das duplizirte, und 2 : 4 das subduplizirte Verhältniß.

V. Zusatz: Eben so kömmt das triplizirte und subtriplizirte Verhältniß (Ratio triplicata et subtriplicata) zum Vorscheine, wenn man durch Multiplikation aus drei gleichen Verhältnissen, wo das Hinterglied des ersten Verhältnisses das Vorderglied des zweiten, und das Hinterglied des zweiten das Vorderglied des dritten Verhältnisses wird, eine neue Proportion bildet, und in dieser aus allen Gliedern die Kubikwurzel auszieht; d. h., wenn

$$
\begin{array}{ll}
 & a : b = a : b, \\
 & a : b = b : c, \\
 & a : b = c : d, \\
\hline
\text{so ist} & a^3 : b^3 = abc : bcd, \\
\text{oder} & a^3 : b^3 = a : d, \\
\text{und} & a : b = \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{d}.
\end{array}
$$

Das Verhältniß $a : d$ ist das triplizirte vom Verhältnisse $a : b$, und $a : b$ das subtriplizirte von $a : d$.

Beispiel:

$$
\begin{array}{ll}
 & 2 : 4 = 3 : 6, \\
 & 2 : 4 = 6 : 12, \\
 & 2 : 4 = 12 : 24, \\
\hline
\text{also} & 2^3 : 4^3 = (3 \,.\, 6 \,.\, 12) : (6 \,.\, 12 \,.\, 24), \\
\text{oder} & 2^3 : 4^3 = 3 : 24, \\
\text{und} & 2 : 4 = \sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{24}.
\end{array}
$$

In diesem Beispiele ist 3 : 24 das triplizirte Verhältniß von 2 : 4, und 2 : 4 das subtriplizirte Verhältniß von 3 : 24.

Anmerkung: 1) Die hier angeführten Eigenschaften der Proportionen beziehen sich auf solche Proportionen, die überhaupt mit bloßen oder unbenannten Zahlen (I. §. 78. a.) ausgedrückt werden; sie gelten aber allgemein von allen Proportionen, weil beim geometrischen Verhältnisse die Glieder gleichartig sein müssen (II. §. 50. a.), und das Verhältniß gleichartiger, durch einerlei Maaß bestimmter Größen dem Verhältnisse der Zahlen gleich ist, die ihnen als Koeffizienten voranstehen, und sich deßhalb alle geometrischen Proportionen auf Proportionen von bloßen Zahlen reduziren lassen.

2) Bei einigen der hier angeführten Lehrsätze ist der Exponent durch q ausgedrückt, und deßhalb anstatt der im §. 35. aufgestellten Formel $a : am = b : bm$ die Formel $a : aq = b : bq$ als ein ebenfalls allgemein giltiger Ausdruck zur Bezeichnung der geometrischen Proportion gesetzt worden, indem offenbar a in aq so und so oft enthalten ist, wie b in bq.

IV. Abschnitt.

Von den geometrischen Progressionen.

§. 45.

I. Lehrsatz:

Jede geometrische Reihe ist unter nachstehender Formel enthalten:

$a, am, am^2, am^3, am^4, \ldots\ldots$

Beweis:

1) Die geometrische Reihe oder Progression besteht aus Zahlen, die in gleichen stättigen geometrischen Verhältnissen fortgehen, wo also zwischen einem Gliede, und dem unmittelbar darauf folgenden immer der nämliche Exponent ist (III. §. 88. e.);

2) Wenn a das erste Glied, und m den allen Verhältnissen gemeinschaftlichen Exponenten bezeichnet, so drückt $a : am$ allemal das erste Verhältniß einer geometrischen Reihe aus (§. 33.);

3) Das zweite Glied einer solchen Reihe ist zugleich ein Vorderglied (III. §. 88. Zus. II.); man findet daher sein Hinterglied, oder das dritte Glied der Reihe, wenn man mit dem gemeinschaftlichen Exponenten m das zweite Glied multiplizirt, deßhalb ist das dritte Glied $= am \times m = am^2$;

4) Aus den nämlichen Gründen findet man, wenn man das dritte Glied mit m multiplizirt, das vierte Glied, welches $= am^2 \times m = am^3$, und allgemein bekömmt man jedes folgende Glied dadurch, daß man allemal das unmittelbar hervorgehende Glied mit dem Exponenten m multiplizirt.

Die vorsteheude Formel drückt daher jede geometrische Progression aus.

Ist z. B. bei einer zunehmenden geometrischen Reihe von fünf Gliedern das erste Glied $= 1$, und

der

der gemeinschaftliche Exponent $= 3$, so ist das zweite Glied $am = 1 \times 3 = 3$, das dritte $am^2 = 1 \times 3^2 = 9$, das vierte $am^3 = 1 \times 3^3 = 27$, und das fünfte Glied $am^4 = 1 \times 3^4 = 81$, und man erhält die zunehmende geometrische Reihe 1, 3, 9, 27, 81.

Ist die geometrische Reihe abnehmend, so ist der gemeinschaftliche Exponent m ein ächter Bruch. Es sei z. B. bei einer abnehmenden geometrischen Reihe von sechs Gliedern das erste Glied $= 64$, und der gemeinschaftliche Exponent $= \frac{1}{2}$, so ist das zweite Glied $am = 64 \times \frac{1}{2} = 32$, das dritte $am^2 = 64 \times \frac{1}{4} = 16$, das vierte $am^3 = 64 \times \frac{1}{8} = 8$, das fünfte $am^4 = 64 \times \frac{1}{16} = 4$, und das sechste Glied $am^5 = 64 \times \frac{1}{32} = 2$, und man hat die abnehmende geometrische Reihe 64, 32, 16, 8, 4, 2.

I. Zusatz: Jedes Glied einer geometrischen Reihe ist ein Produkt aus dem ersten Gliede a in eine Potenz von m, deren Exponent so viele Einheiten enthält, als Glieder vorausgehen, folglich ist das allgemeine oder $n$te Glied $= a \times m^{n-1} = am^{n-1}$.

II. Zusatz: Drückt n die Anzahl aller Glieder einer geometrischen Reihe aus, so gibt der Ausdruck des allgemeinen Gliedes das letzte Glied; d. h., $u = am^{n-1}$.

III. Zusatz: Der vollständige Ausdruck einer geometrischen Reihe für jede beliebige Anzahl von Gliedern, wenn dieselbe $= n$ gesetzt wird, ist folgende Formel:

$$a, am, am^2, am^3, \ldots am^{n-2}, am^{n-1}.$$

§. 46.

II. Lehrsatz:

Wenn man alle Glieder einer geometrischen Progression mit dem ersten Gliede dividirt, so erhält man eine andere geometrische Reihe, deren erstes Glied die Zahl 1 ist, und wo wegen des nämlichen

Exponenten zwischen den Gliedern das vorige Verhältniß Statt findet.

Beweis:

1) Jede geometrische Reihe ist durch nachstehende Formel ausgedrückt (§. 45. Zus. III.):

$$a,\ am,\ am^2,\ am^3,\ \ldots\ am^{n-2},\ am^{n-1};$$

2) Dividirt man alle Glieder mit a, so erhält man

$$1,\ m,\ m^2,\ m^3,\ \ldots\ m^{n-2},\ m^{n-1};$$

3) Hier hat man wieder eine geometrische Reihe, weil $1 : m = m : m^2$, dann $m : m^2 = m^2 : m^3$, u. s. f., das ist, weil man überhaupt solche Zahlen hat, die in gleichen stättigen geometrischen Verhältnissen fortgehen;

4) Diese Reihe hat zum ersten Gliede die Zahl 1, und, wie die bei Nro. 1. angeführte Reihe, die Zahl m zum gemeinschaftlichen Exponenten.

Hat man z. B. die geometrische Reihe 2, 4, 8, 16, 32, 64, und man dividirt mit dem ersten Gliede 2 alle Glieder, so erhält man 1, 2, 4, 8, 16, 32; in dieser letzten Reihe ist 1 das erste Glied, und die Zahl 2 ist auch wieder der gemeinschaftliche Exponent.

I. Zusatz: In jeder geometrischen Reihe, deren erstes Glied = 1 ist, sind alle Glieder Potenzen vom zweiten Gliede.

Setzt man in der allgemeinen Formel $a,\ am,\ am^2,\ am^3,\ \ldots\ am^{n-2},\ am^{n-1}$ das erste Glied $a = 1$, so erhält man die Reihe $1,\ m,\ m^2,\ m^3,\ m^{n-2},\ m^{n-1}$, wo offenbar alle Glieder Potenzen des zweiten Gliedes m sind, weil auch $1 = m^0$ (III. §. 77. Zus. II.) und $m = m^1$ (III. §. 74. Zus. II.).

Hat man z. B. die geometrische Reihe 1, 2, 4, 8, 16, 32, so ist $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, und $32 = 2^5$, und man hat die Reihe $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$, wo man sieht, daß alle Glieder Potenzen des zweiten Gliedes sind.

Zusatz II. Es drücke A die allgemeine Formel geometrischer Reihen aus, derer erstes Glied = 1 ist, und B bezeichne eine arithmetische Reihe, die mit 0 anfängt, und in den folgenden Gliedern die natürlichen Zahlen der Ordnung nach enthält:

A. $1, m, m^2, m^3, m^4, m^5, \ldots$

B. $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Hier gibt jede Zahl der Reihe B die Anzahl der Verhältnisse an, aus denen das Verhältniß von 1 zu der ober ihr stehenden Zahl in der Reihe A zusammengesetzt ist.

So gibt die Zahl 4 in der Reihe B an, daß Verhältniß $1 : m^4$ sei aus vier gleichen Verhältnissen, nämlich aus $1 : m = m : m^2 = m^2 : m^3 = m^3 : m^4$ zusammengesetzt.

Beispiel:

A. $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,$

oder $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6,$

B. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

Da drückt 5 aus, das Verhältniß $1 : 32$ sei aus den fünf gleichen Verhältnissen $1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 = 16 : 32$ zusammengesetzt.

III. Zusatz: Die Reihe B enthält der Ordnung nach die Exponenten jener Potenzen, zu welchen das zweite Glied der Reihe A erhoben werden muß, um die oben stehenden Glieder dieser Reihe zu erhalten; daher zeigt z. B. die Zahl 4 als das fünfte Glied der Reihe B an, man soll 2 zur 4ten Potenz erheben, um das fünfte Glied der Reihe A, somit 16 zu erhalten, da $2^4 = 16$.

IV. Zusatz: Nimmt man im II. Zusatze als Beispiel zum zweiten Gliede für m anstatt 2 eine andere Zahl, so kommen in der Reihe A ganz andere Zahlen zum Vorscheine, während die Reihe B die nämliche bleibt; indeß geben aber wieder, wie vorhin, die Glieder der Reihe B die Anzahl der Verhältnisse an (Zus. II.), und sind zugleich die Exponenten jener Potenzen, zu denen das zweite Glied der Reihe A zu erheben ist, um die Glieder dieser Reihe zu erhalten (Zus. III.).

Wird die Zahl 3 als das zweite Glied angenommen, so erhält man folgende Reihen, welche die angegebenen Eigenschaften haben:

A. 1, 3, 9, 27, 81, 243,
oder 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5,
B. 0, 1, 2, 3, 4, 5.

V. Zusatz: Man kann anstatt m (Zus. II.) jede beliebige Zahl annehmen, nur nicht die Zahl 1, weil jede Potenz von 1 wieder 1 ist; um deßwillen lassen sich immer eine Menge von Zahlen, alle nämlich, die als Glieder der geometrischen Reihe A vorkommen, als Potenzen einer beliebigen Zahl, die man als das zweite Glied in der Reihe A annimmt, betrachten, wozu die arithmetische Reihe B die entsprechenden Exponenten gibt.

Nimmt man z. B. die Zahl 10 als das zweite Glied an, so bekömmt man nachstehende Reihen, von denen das gilt, was in Absicht auf die Anzahl der Verhältnisse (Zus. II.), und die Exponenten (Zus. III.) gesagt wurde.

A. 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000,
oder 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5,
B. 0, 1, 2, 3, 4, 5.

§. 47.

III. Lehrsatz:

A) Die Summe aller Glieder einer zunehmenden geometrischen Reihe oder S ist

$$= \frac{am^n - a}{m - 1}, \text{ oder auch } = \frac{um - a}{m - 1}; \text{ und}$$

B) die Summe aller Glieder einer abnehmenden geometrischen Reihe oder S ist

$$= \frac{a - am^n}{1 - m}, \text{ oder auch } = \frac{a - um}{1 - m}.$$

I. Beweis:

1) Man erhält die Summe der ganzen Progression, wenn man alle Glieder addirt, daher ist S = a

$+ am + am^2 + \ldots + am^{n-2} + am^{n-1}$;

2) Man multiplizire alle Glieder dieser Gleichung mit m, und man erhält wieder nachstehende Gleichung:

$$mS = am + am^2 + \ldots + am^{n-1} + am^n;$$

3) Von dieser Gleichung subtrahire man die bei Nro. 1. vorkommende:

$$mS = am + am^2 + \ldots + am^{n-1} + am^n,$$

$$\underset{-}{S} = \underset{-}{a} \underset{-}{+} am \underset{-}{+} am^2 \underset{-}{+} \ldots \underset{-}{+} am^{n-2} \underset{-}{+} am^{n-1},$$

daher $mS - S = am^n - a;$

4) Ist die Reihe zunehmend, so ist $m > 1$, somit $mS > S$, und die Differenz $mS - S$ ist eine positive Größe; man bestimme jetzt, indem man in Faktoren auflöset (III. §. 87. IV.), nach den im III. Thl. §. 98. aufgestellten Regeln die Summe:

$$mS - S = am^n - a,$$

$$(m - 1)S = am^n - a,$$

$$S = \frac{am^n - a}{m - 1};$$

5) Ist die Reihe abnehmend, so ist $m < 1$, somit $mS < S$, und die Differenz $mS - S$ ist eine negative Größe; damit diese positiv wird, verändere man in der Gleichung alle Zeichen (III. §. 96. Zus. II.), und suche wieder S:

$$mS - S = am^n - a,$$

$$-mS + S = -am^n + a,$$

$$S - mS = a - am^n,$$

$$(1 - m)S = a - am^n,$$

$$S = \frac{a - am^n}{1 - m};$$

6) Nach dem II. Zusatze des §. 45. ist $u = am^{n-1}$, und die Potenz m^{n-1} läßt sich als einen Quotienten betrachten, den man erhält, wenn man m^n mit m dividirt (III. §. 77. Zus. I.), daher ist $m^{n-1} = \frac{m^n}{m}$; setzt man den letzten Ausdruck anstatt m^{n-1}, so ist $u = \frac{am^n}{m}$, somit $um = am^n$.

In den bei Nro. 4 und 5. vorkommenden Formeln substituire man anstatt am^n den gleichen Ausdruck um, und man erhält für die zunehmende geometrische Reihe auch die Formel $S = \frac{um - a}{m - 1}$, und für die abnehmende die Formel $S = \frac{a - um}{1 - m}$.

II. Beweis:

1) Die geometrische Progression besteht aus lauter gleichen stättigen geometrischen Verhältnissen (III. §. 88. d. und e.), weßhalb in einer solchen Reihe alle Glieder, mit Ausnahme des letzten Gliedes, Vorderglieder, und alle Glieder, mit Ausnahme des ersten Gliedes, Hinterglieder sind (III. §. 88. Zus. II.);

2) Weil alle Verhältnisse einander gleich sind, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede (§. 39. Zus. II.): drückt nun S wieder die Summe aller Glieder aus, so bezeichnet $S - u$ die Summe aller Vorderglieder, und $S - a$ die Summe aller Hinterglieder, und man erhält folgende Proportion, die man in eine Gleichung verwandelt:

$$S - u : S - a = a : am,$$

oder $$S - u : S - a = 1 : m,$$

daher $mS - um = S - a$,
und $mS - S = um - a$;

3) Ist die Reihe zunehmend, so ist mS größer als S, und daher $S = \frac{um - a}{m - 1}$; ist aber die Reihe abnehmend, so ist $S > mS$, und $S = \frac{a - um}{1 - m}$.

4) Substituirt man, wie es im vorigen Beweise bei Nro. 6. geschehen ist, anstatt mu den Ausdruck am^n, so bekömmt man für die zunehmende geometrische Reihe wieder die Formel $S = \frac{am^n - a}{m - 1}$, und für die abnehmende die Formel $S = \frac{a - am^n}{1 - m}$.

Ist z. B. die zunehmende geometrische Reihe 2, 4, 8, 16, 32, 64 gegeben, so ist nach der Formel $S = \frac{am^n - a}{m - 1}$, indem $a = 2$, dann $m = 2$, und $n = 6$, die Summe aller Glieder oder $S = \frac{2 \,.\, 2^6 - 2}{2 - 1} = \frac{2 \,.\, 64 - 2}{2 - 1} = \frac{128 - 2}{2 - 1} = 126$, und, da $u = 64$, nach der Formel $S = \frac{um - a}{m - 1}$ ist die Summe oder $S = \frac{64 \,.\, 2 - 2}{2 - 1} = 126$, was sich wirklich so verhält, weil $S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126$.

Hat man z. B. die abnehmende geometrische Reihe 243, 81, 27, 9, 3, so ist nach der Formel $S = \frac{a - am^n}{1 - m}$, indem $a = 243$, dann $m = 1/3$, ferner $n = 5$, und $m^n = (1/3)^5 = 1/243$, die Summe der

ganzen Progression oder $S = \frac{243 - 243 \times {}^{1}/_{243}}{1 - {}^{1}/_{3}}$ $= (243 - 1) : {}^{2}/_{3} = 242 : {}^{2}/_{3} = {}^{726}/_{2} = 363$, und, da $u = 3$, nach der Formel $S = \frac{a - um}{1 - m}$ ist die Summe oder $S = \frac{243 - 3 \times {}^{1}/_{3}}{1 - {}^{1}/_{3}} = 242 : {}^{2}/_{3}$ $= 363$, was wirklich so ist, weil $S = 243 + 81 + 27 + 9 + 3 = 363$.

§. 48.

Entwickelung jener Formeln, nach welchen in Betreff der geometrischen Reihen die Aufgaben aufgelöset werden.

I. Nach dem II. Zusatze des §. 45. ist das letzte Glied oder $u = am^{n-1}$. In dieser Gleichung, die mit A bezeichnet wird, kommen vier Stücke vor, nämlich das erste Glied a, das letzte Glied u, der gemeinschaftliche Exponent m, und die Anzahl der Glieder, welche durch n ausgedrückt ist.

II. Jede dieser vier Größen kann, wenn man sie als unbekannte Größen betrachtet, gefunden werden. Die Bestimmung der unbekannten Stücke, im Falle die übrigen allemal bekannt sind, geschieht nach den im III. Thl. §. 98. aufgestellten Regeln, und dadurch, daß man auf beiden Seiten der Gleichung die nämliche Wurzel auszieht (III. §. 70. 1.), wie auch durch Hilfe der Logarithmen, die im nächsten Hauptstücke vorgetragen, indeß aber schon jetzt benützt werden, weil in der Folge die Formeln von geometrischen Reihen nicht mehr passend entwickelt werden könnten.

Man bekömmt demnach nachstehende vier Gleichungen:

$$\text{A)}\quad u = am^{n-1},$$

$$\text{1)}\quad u = am^{n-1},$$

2) $a = \frac{u}{m^{n-1}}$,

3) $m = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$,

4) $n = \frac{\text{Log. } u - \text{Log. } a}{\text{Log. } m} + 1.$

III. Nach §. 47. A. ist $S = \frac{um - a}{m - 1}$; in dieser Gleichung, die ich mit B bezeichne, kann man nach den im III. Thl. §. 98. vorkommenden Regeln die Größen S, u, m, und a bestimmen, und man erhält folgende vier neue Gleichungen:

B) $S = \frac{um - a}{m - 1}$,

5) $S = \frac{um - a}{m - 1}$,

6) $u = \frac{mS + a - S}{m} = \frac{a + (m - 1)S}{m}$,

7) $a = um + S - mS = um - (m - 1)S$,

8) $m = \frac{S - a}{S - u}$.

IV. Die Größen u, a und m kommen zweimal vor; man erhält deßhalb durch die Vergleichung der Werthe drei neue Gleichungen, die ich mit C, D und E bezeichne:

C) $\frac{mS + a - S}{m} = am^{n-1}$, wegen u;

D) $um + S - mS = \frac{u}{m^{n-1}}$, wegen a;

E) $\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \frac{S - a}{S - u}$, wegen m.

V. In der Gleichung C können die Größen a, m, n und S, in der Gleichung D die Größen u, m, n und S, und in der Gleichung E die Größen

u, a, n und S bestimmt werden. Man bekömmt dadurch nachstehende 12 neue Gleichungen, von welchen einige durch Hilfe der Logarithmen aufgelöset sind, während andere bloß geordnet wurden, ohne daß zugleich der Werth der unbekannten Größen bestimmt ist:

$$\text{C)}\quad \frac{mS + a - S}{m} = am^{n-1},$$

$$mS + a - S = am^{n},$$

$$\text{9)}\quad S = \frac{am^{n} - a}{m - 1} = \frac{a(m^{n} - 1)}{m - 1};$$

$$\text{10)}\quad a = \frac{mS - S}{m^{n} - 1} = \frac{(m - 1)S}{m^{n} - 1};$$

$$mS + a - S = am^{n},$$

$$am^{n} - mS + S - a = 0,$$

$$\text{11)}\quad m^{n} - \frac{S}{a}m + \frac{S - a}{a} = 0;$$

$$am^{n} = mS + a - S,$$

$$m^{n} = \frac{mS + a - S}{a},$$

$$\text{Log. } m \times n = \text{Log. }\left(\frac{mS + a - S}{a}\right),$$

$$\text{12)}\quad n = \left(\text{Log. }\left(\frac{mS + a - S}{a}\right)\right) : \text{Log. } m$$

$$= \left(\text{Log. }\left(1 + \frac{S(m - 1)}{a}\right)\right) : \text{Log. } m$$

$$= \left(\text{Log. }\left(1 + S \times \frac{m - 1}{a}\right)\right) : \text{Log. } m;$$

D) $um + S - mS = \frac{u}{m^{n-1}}$,

$um^n + Sm^{n-1} - Sm^n = u.$

$m^nS - m^{n-1}S = um^n - u$,

$S(m^n - m^{n-1}) = um^n - u$,

13) $S = \frac{um^n - u}{m^n - m^{n-1}} = \frac{u(m^n - 1)}{(m-1)m^{n-1}}$;

$um^n + Sm^{n-1} - Sm^n = u$,

$m^nu - u = Sm^n - Sm^{n-1}$,

$u(m^n - 1) = (Sm - S)m^{n-1}$,

14) $u = \frac{S(m-1)m^{n-1}}{m^n - 1}$,

$um^n + Sm^{n-1} - Sm^n = u$,

$- um^n - Sm^{n-1} + Sm^n = - u$,

$Sm^n - um^n - Sm^{n-1} + u = o$,

$(S - u)m^n - Sm^{n-1} + u = o$,

15) $m^n - \frac{S}{S-u} m^{n-1} + \frac{u}{S-u} = o$;

$um + S - mS = \frac{u}{m^{n-1}}$,

$(um + S - mS)m^{n-1} = u$,

$m^{n-1} = \frac{u}{um + S - mS}$,

$$\text{Log. } m \times (n-1) = \text{Log.} \left(\frac{u}{um + S - mS}\right),$$

$$n - 1 = \text{Log.} \left(\frac{u}{um + S - mS}\right) : \text{Log. } m,$$

16) $$n = 1 + \text{Log.} \left(\frac{u}{um + S - mS}\right) : \text{Log. } m$$

$$= 1 + \text{Log.} \left(\frac{u}{um - S(m-1)}\right) : \text{Log. } m;$$

E) $$\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \frac{S-a}{S-u},$$

$$\frac{\sqrt[n-1]{u}}{\sqrt[n-1]{a}} = \frac{S-a}{S-u},$$

$$S\sqrt[n-1]{u} - u\sqrt[n-1]{u} = S\sqrt[n-1]{a} - a\sqrt[n-1]{a}.$$

$$S\sqrt[n-1]{u} - S\sqrt[n-1]{a} = u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a},$$

$$\left(\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}\right)S = u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a},$$

17) $$S = \frac{u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}};$$

$$\frac{\sqrt[n-1]{u}}{\sqrt[n-1]{a}} = \frac{S-a}{S-u},$$

$$\sqrt[n-1]{u} \times (S-u) = \sqrt[n-1]{a} \times (S-a).$$

Man erhebe alle Glieder der Gleichung zur $(n-1)$ten Würde:

$$u \times (S-u)^{n-1} = a \times (S-a)^{n-1},$$

18) $$u \times (S-u)^{n-1} - a \times (S-a)^{n-1} = 0;$$

19) $a \times (S - a)^{n-1} - u(S - u)^{n-1} = 0;$

$$\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \frac{S - a}{S - u},$$

$$\text{Log.}\ \frac{u}{a} : (n - 1) = \text{Log.}\ \frac{S - a}{S - u},$$

$$\text{Log.}\ \frac{u}{a} = \text{Log.}\ \left(\frac{S - a}{S - u}\right) \times (n - 1),$$

$$n - 1 = \text{Log.}\ \frac{u}{a} : \text{Log.}\ \left(\frac{S - a}{S - u}\right),$$

20) $n = 1 + \text{Log.}\ \frac{u}{a} : \text{Log.}\ \left(\frac{S - a}{S - u}\right).$

VI. Bei jeder dieser Formeln kommen nur vier Stücke vor; wenn daher drei Stücke bekannt sind, so ist die vierte unbekannte Größe allemal bestimmt, und die Anzahl der möglichen Aufgaben beläuft sich bei den geometrischen Reihen, wie bei den arithmetischen (§. 31. VI.), auf zwanzig, weil die 5 Hauptgleichungen A, B, C, D und E vorhanden sind, und in jeder dieser Gleichungen 4 Werthe bestimmt werden können.

VII. Zur bequemeren Benützung bringe ich diese 20 Formeln in eine Tabelle, wo a das erste Glied, u das letzte Glied, m den gemeinschaftlichen Exponenten, n die Anzahl aller Glieder, und S die Summe derselben bezeichnet.

VIII. Was in Betreff der arithmetischen Reihen im §. 31. VIII. von Nro. 1 bis 4. bemerkt wurde, ist in Absicht auf diese Tabelle ebenfalls in Anwendung zu bringen.

Tabelle der Formeln,

nach welchen die bei den geometrischen Reihen vorkommenden verschiedenen Aufgaben aufgelöset werden.

Man sucht	Man gibt die Stücke	Nach der Formel	welche vorkömmt bei
a	m, n, u	1) $a = \frac{u}{m^{n-1}}$,	A, Nro. 2.
	m, S, u	2) $a = um - (m - 1)S$,	B, — 7.
	m, n, S	3) $a = \frac{(m - 1)S}{m^{n} - 1}$,	C, — 10.
	n, S, u	4) $a \times (S - a)^{n-1} - u(S - u)^{n-1} = 0$;	E, — 19.
m	a, n, u	5) $m = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$,	A, — 3.
	a, S, u	6) $m = \frac{S - a}{S - u}$,	B, — 8.

Man sucht	Man gibt die Stücke	Nach der Formel	welche vorkömmt bei
m	a, n, S	7) $m^{n} - \frac{S}{a} m + \frac{S - a}{a} = 0,$	C, Nro. 11.
	n, S, u	8) $m^{n} - \frac{S}{S - u} m^{n-1} + \frac{u}{S - u} = 0;$	D, — 15.
n	a, m, u	9) $n = 1 + \frac{\log. u - \log. a}{\log. m},$	A, — 4.
	a, m, S	10) $n = \left(\log. \left(1 + S \times \frac{m - 1}{a}\right)\right) : \log. m,$	C, — 12.
	m, S, u	11) $n = 1 + \log. \left(\frac{u}{um - (m - 1)S}\right) : \log. m,$	D, — 16.
	a, S, u	12) $n = 1 + \log. \frac{u}{a} : \log. \left(\frac{S - a}{S - u}\right);$	E, — 20.
S	a, m, u	13) $S = \frac{um - a}{m - 1},$	B, — 5.

Man sucht	Man gibt die Stücke	Nach der Formel	welche vorkömmt bei
S	a, m, n	14) $S = \frac{a(m^n - 1)}{m - 1}$,	C, Nro. 9.
	m, n, u	15) $S = \frac{u(m^n - 1)}{(m-1)m^{n-1}}$;	D, — 13.
	a, n, u	16) $S = \frac{u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}$;	E, — 17.
u	a, m, n	17) $u = am^{n-1}$,	A, — 1.
	a, m, S	18) $u = \frac{a + (m-1)S}{m}$,	B, — 6.
	m, n, S	19) $u = \frac{S(m-1)m^{n-1}}{m^n - 1}$,	D, — 14.
	a, n, S	20) $u(S-u)^{n-1} - a(S-a)^{n-1} = 0$.	E, — 18.

Anmerkung: 1) Diese 20 Formeln sind zunächst für die aufsteigenden Progressionen berechnet; sie können aber auch bequem für die abnehmenden benützt werden, wenn man diese umkehrt, und wie aufsteigende Reihen betrachtet, indem man das erste Glied der abnehmenden Reihe mit u, und das letzte mit a bezeichnet, während man den Exponenten, welcher mit m bezeichnet wird, ebenfalls umkehrt, und einen Bruch setzt, dessen Zähler der Nenner, und dessen Nenner der Zähler des vorigen Exponenten ist.

Hat man z. B. die abnehmende Reihe 64, 32, 16, 8, 4, 2, so setze man das erste Glied $64 = u$, das letzte Glied $2 = a$, und den Exponenten m, welcher $= \frac{1}{2}$ ist, setze man $= \frac{2}{1} = 2$, und man bekömmt die zunehmende geometrische Reihe 2, 4, 8, 16, 32, 64, bei welcher die nämliche Summe und die vorige Anzahl der Glieder da ist, und somit die für die zunehmenden Reihen aufgestellten Formeln benützt werden können.

Wenn a, m und n, oder a, u und m gegeben sind, um S zu finden, so hat man nach dem III. Lehrsatze des §. 47. B. die für die abnehmenden Reihen geeigneten Formeln schon, und darf also da die so eben angezeigten Veränderungen nicht vornehmen.

2) Wie aus einfachen Größen die Wurzeln, wenn sie keine Quadrat- und Kubikwurzeln sind, auszuziehen sind, wird im nächsten Hauptstücke bei der Lehre von den Logarithmen gezeigt werden, gleichwie man erst dann, wenn man mit Logarithmen rechnen kann, jene der vorstehenden Formelu wird entwickeln und benützen können, bei welchen Logarithmen vorkommen.

3) Die vier mit Nro. 4, 7, 8 und 20 bezeichneten Formeln sind höhere Gleichungen, derer Auflösung in diesem Buche noch nicht gezeigt wurde; sie sind deßhalb nur geordnet und auf Null gebracht, und keineswegs der Art, daß man sie bei vorkommenden Beispielen zur Bestimmung der unbekannten Stücke benützen könnte.

4) Die arithmetischen abnehmenden Reihen könnte man auf eine ähnliche Weise, wie es bei den geometrischen in der vorstehenden 1. Anmerkung vorgeschrieben wurde, als zunehmende Reihen betrachten, indem man die Differenz positiv setzt, und das erste Glied für das letzte, und dieses für das erste annimmt, wo dann die Summe und die Anzahl der Glieder die nämliche bleibt; indeß ist aber dieses nicht nothwendig, weil man auch bei einem negativen Exponenten die in der Tabelle des §. 31. vorkommenden Formeln ohne Anstand benützen kann.

§. 49.

Beispiele zur Uebung.

I.

Wie groß ist das letzte Glied einer zunehmenden geometrischen Reihe, bei welcher das erste Glied = 3, der gemeinschaftliche Exponent = 2, und die Summe aller Glieder = 765 ist?

Auflösung:

1) Weil hier u gesucht wird, und die Stücke a, m und S gegeben sind, so ist in der Tabelle des vorigen §. die 18te Formel zu benützen, nach welcher $u = \frac{a + (m-1)S}{m}$, und somit $= \frac{3 + (2-1)765}{2}$ $= \frac{3 + 765}{2} = {}^{768}/_2 = 384$, weßhalb das gesuchte letzte Glied = 384 ist.

Zur Probe suche man eines der vorkommenden Stücke nach einer anderen Formel, etwa S nach der 13ten Formel, wo $S = \frac{um - a}{m - 1}$; weil hier u = 384, m = 2, und a = 3, so ist $S = \frac{384 \times 2 - 3}{2 - 1}$ $= \frac{768 - 3}{2 - 1} = 765$. Man findet wieder die vorige Summe, um deßwillen ist 384 wirklich das verlangte letzte Glied.

II.

Wie groß ist das erste Glied einer abnehmenden oder fallenden geometrischen Reihe, bei welcher das letzte Glied = 1, die Anzahl aller Glieder = 6, und der Exponent = ⅓ ist?

Auflösung:

Weil hier a gesucht wird, und die Stücke u, n und m gegeben sind, so wäre in der Ta-

belle die 1te Formel zu benützen, nach welcher $u = \frac{a}{m^{n-1}}$.

In Gemäßheit der der Tabelle beigefügten 1ten Anmerkung betrachte man aber diese Reihe als eine aufsteigende, und setze das erste Glied = u, das letzte = a, und anstatt ⅓ nehme man den Exponenten ³⁄₁ = 3; es muß jetzt nach der 17ten Formel das letzte Glied u gesucht werden, welches $= am^{n-1}$, und somit $= 1 \times 3^{6-1} = 3^5 = 243$; es ist also das erste Glied der gegebenen abnehmenden Reihe = 243.

Zur Probe suche man das letzte Glied dieser Reihe, welches auf die angezeigte Weise mit a bezeichnet wird, während u = 243, und m = 3 gesetzt wird. Es ist nach der 1ten Formel $a = \frac{u}{m^{n-1}}$, also hier $= \frac{243}{3^{6-1}} = \frac{243}{3^5} = {}^{243}/_{243} = 1$; deßhalb ist wieder die Zahl 1 das letzte Glied der abnehmenden Reihe, und die vorgenommene Auflösung ist richtig.

III.

Es spielt Jemand zwölfmal in die Lotterie, setzt das erste Mal 6 kr., und duplizirt jedes Mal seinen vorhergehenden Einsatz. Wie groß ist nun der ganze Verlurst, wenn man bei den vorgenommenen 12 Ziehungen nichts gewonnen hat, und zu welcher Summe stieg der letzte Einsatz?

Auflösung:

a) Weil hier a = 6, dann m = 2, und n = 12, und die Summe S gesucht wird, so benütze man, um S zu finden, die in der Tabelle vorkommende 14te

Formel, nach welcher $S = \frac{a(m^n - 1)}{m - 1}$; daher ist $S = \frac{6(2^{12} - 1)}{2 - 1} = 6 \times (2^{12} - 1)$.

Man potenzire 2 auf eine ähnliche Weise, wie es im III. Thl. beim VIII. Beispiele des §. 91. geschehen ist, und man findet, daß $2^{12} = 4096$, weil $m = 2$, also $m^2 = 4$, dann $m^2 \times m^2 = m^4 = 4 \times 4 = 16$, und $m^4 \times m^4 \times m^4 = m^{12} = 16 \times 16 \times 16 = 256 \times 16 = 4096$; um deßwillen ist $S = 6 \times (4096 - 1) = 24576 - 6 = 24570$ kr. = 409 fl. 30 kr.

b) Um aus den gegebenen Stücken auch u zu finden, benütze man in der Tabelle die 17te Formel, nach welcher $u = am^{n-1}$, also $= 6 \times 2^{12-1} = 6 \times 2^{11}$.

Nach der vorigen Auflösung ist $m^n = 2^{12} = 4096$, und $m^n : m = m^{n-1}$, daher ist auch $4096 : 2 = 2048 = 2^{12-1} = 2^{11}$, und $u = 6 \times 2048 = 12288$ kr. = 204 fl. 48 kr.

Es wurden also bei der zwölften 204 fl. 48 kr., und bei allen zwölf Ziehungen 409 fl. 30 kr. gesetzt.

Zur Probe suche man etwa aus a, m und u die Summe S nach der 13ten Formel, nach welcher $S = \frac{um - a}{m - 1}$, somit $= \frac{12288 \times 2 - 6}{2 - 1} = 24570$ kr. = 409 fl. 30 kr., woraus die Richtigkeit der vorgenommenen Auflösungen ersichtlich ist.

IV.

Zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{16}$ sollen noch zwei Glieder eingeschaltet werden, damit eine abnehmende geometrische Reihe von vier Gliedern entsteht, deren erstes Glied $= \frac{1}{2}$, und deren letztes Glied $= \frac{1}{16}$ ist.

Auflösung:

Weil man hier eine abnehmende geometrische Reihe hat, so setzt man das erste Glied = $1/16$, und das letzte = $1/2$, während die Anzahl der Glieder = 4 ist.

Man benütze in der Tabelle die 5te Formel, und suche zuerst den Exponenten m; es ist m

$$= \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \sqrt[4-1]{(1/2 : 1/16)} = \sqrt[3]{16/2} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Da die Reihe abnehmend ist, so kehre man den Bruch $2/1$ um, man erhält $1/2$ als den verlangten Exponenten, durch den jetzt die beiden verlangten Glieder leicht gefunden werden; es ist das zweite Glied $= 1/2 \times 1/2 = 1/4$, das dritte $= 1/4 \times 1/2 = 1/8$, und man hat die abnehmende Reihe $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$.

Bei diesem kleinen Beispiele bedarf es keiner Probe, weil man unmittelbar sieht, daß man hier die gesuchten Glieder wirklich gefunden hat.

V.

Dem Sessa, Erfinder des Schachspieles, wurde die Bitte bewilliget, daß man ihm zur Belohnung für das erste der 64 Felder 1 Waizenkörnchen, für das zweite 2, für das dritte 4, und auf diese Weise immer für das folgende Feld doppelt so viel, als für das unmittelbar vorhergehende, geben wolle.

Es ist nun die Frage, wie groß war die Anzahl aller gefoderten Waizenkörner, die man ihm hätte geben sollen?

Auflösung:

Man hat hier eine zunehmende geometrische Reihe, bei welcher das erste Glied oder a = 1, der Exponent oder m = 2, und die Anzahl aller Glieder oder n = 64; um deßwillen ist aus der Tabelle die 14te Formel zu benutzen, nach welcher $S = \frac{a(m^n - 1)}{m - 1}$, und somit $= \frac{1(2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1$.

Erhebt man den Exponenten 2 auf die beim III. Beispiele angezeigte Weise zur 64ten Potenz, so erhält man zum Produkte nachstehende Zahl:

$$m = 2,$$
$$m \times m = m^2 = 2 \times 2 = 4,$$
$$m^2 \times m^2 = m^4 = 4 \times 4 = 16,$$
$$m^4 \times m^4 = m^8 = 16 \times 16 = 256,$$
$$m^8 \times m^8 = m^{16} = 256 \times 256 = 65536,$$
$$m^{16} \times m^{16} = m^{32} = 65536 \times 65536 = 4.294'967.296,$$
$$m^{32} \times m^{32} = m^{64} = 4.294'967.296 \times 4'294'967.296,$$
$$= 18'''446.744''073.709'551.616 = 2^{64}.$$

Daher ist die Summe aller gefoderten Waizenkörner oder S = 18'''446.744''073.709'551.615.

Nehmen wir mit dem Herrn geistlichen Rathe und Stadtpfarrer Professor Magold an, daß ungefähr 2760 Körner vom mittleren Waizen nach baierischem Gewichte 4 Loth, der Münchner Metzen aber 49 Pfund 15 ½ Loth, das Pfund zu 32 Loth gerechnet, wiegt, und daß das Münchner Schäffel 6 Metzen hält (I. §. 83.), so kommen auf das Schäffel vom mittleren Waizen 6'555.690 Körner, folglich beträgt die ganze bewilligte Summe 2''813.855'455.903 Münchner Schäffel.

Würde man täglich eine Million, mithin jährlich 365 Millionen Schäffel entrichten, so würden doch mehr als 7709 Jahre zur völligen Abzahlung erfodert.

VI.

Eine mathematische Charade.

Um den Namen eines gewißen Thieres zu finden, schreibe man drei Zahlen, die unter nachstehenden Bedingungen gefunden werden können, in lateinischer Sprache an, und nehme, der Ordnung nach von jedem Worte den Anfangsbuchstaben:

a) Die erste dieser drei Zahlen ist das letzte Glied einer zunehmenden geometrischen Reihe von 6 Gliedern, bei welcher das erste Glied = 1/100, und der Exponent = 10 ist.

b) Die zweite Zahl ist das erste Glied einer solchen Reihe, bei welcher das letzte Glied = 1408, der

Exponent = 2, und die Summe aller Glieder = 2805 ist.

c) Endlich die dritte Zahl ist der Exponent einer solchen Reihe, wo das erste Glied = 1, das letzte = 16807, und die Summe aller Glieder = 19608.

Auflösung:

a) Nach der ersten Bedingung ist bekannt, daß $a = 1/100$, dann $n = 6$, und $m = 10$ ist; es ist deßhalb, um u zu finden, aus der Tabelle die 17te Formel zu benützen, nach welcher $u = am^{n-1}$, somit hier $= 1/100 \times 10^5 = 1/100 \times 100000 = 100000/100 = 1000$.

Nimmt man vom lateinischen Worte mille (1000) den Anfangsbuchstaben m, so hat man durch die Zahl 1000 den ersten Buchstaben des verlangten Wortes gefunden.

b) Nach der zweiten Bedingung ist bekannt, daß $u = 1408$, dann $m = 2$, und $S = 2805$; man muß daher, um a zu finden, aus der Tabelle die zweite Formel benützen, nach welcher $a = um - (m-1)S$, und somit $= 1408 \times 2 - (2-1)2805 = 2816 - 2805 = 11$.

Nimmt man nun vom lateinischen Worte undecim (11) den ersten Buchstaben u, so hat man durch die Zahl 11 den zweiten Buchstaben des gesuchten Wortes gefunden.

c) Endlich ist nach der dritten Bedingung bekannt, daß $a = 1$, dann $u = 16807$, und $S = 19608$; um m zu finden, benütze man die 6te Formel, nach welcher $m = \frac{S - a}{S - u}$, also hier $= \frac{19608 - 1}{19608 - 16807} = 19607/2801 = 7$.

Nimmt man vom lateinischen Worte septem (7) den ersten Buchstaben s, so hat man durch die Zahl 7 den letzten Buchstaben des verlangten Wortes gefunden.

Durch die Buchstaben m, u und s hat man jetzt das Wort mus gefunden, welches nach den

gesetzten Bedingungen die gesuchte Benennung des Thieres ist.

Anmerkung: 1) Die im III. Theile im §. 91. angeführten letzten drei Beispiele sind nach den hier aufgestellten Formeln aufgelöset.

1) In Absicht auf jene Formeln, wo die Rechnung mit Logarithmen vorkömmt, werden späterhin einige Beispiele ausgearbeitet werden.

V. Abschnitt.

Von der Summirung einiger unendlicher Reihen.

§. 50.

Lehrsatz:

Wenn in einer abnehmenden geometrischen Progression von ächten Brüchen der gemeinschaftliche Exponent m dem ersten Gliede a gleich ist, so ist die Summe einer solchen Reihe oder $S = \frac{a}{1-a} \times (1-u)$.

Beweis:

1) Weil man hier eine abnehmende geometrische Reihe hat, so ist nach §. 47. B. die Summe aller Glieder oder $S = \frac{a - um}{1 - m}$;

2) Nach der Voraussetzung ist $a = m$; wenn man nun a anstatt m substituirt, so erhält man die Formel $S = \frac{a - au}{1 - a}$;

3) Man löse die Differenz $a - au$ in Faktoren

auf (III. §. 87. IV.), und thu beim Bruche $\frac{a(1-u)}{1-a}$ das Nämliche, indem man ihn als ein Produkt aus den Faktoren $\frac{a}{1-a}$ und $1-u$ betrachtet (III. §. 66. c.), da $\frac{a}{1-a} \times (1-u) = \frac{a(1-u)}{1-a}$.

Man findet auf diese Weise, daß die Summe einer solchen abnehmenden geometrischen Reihe oder $S = \frac{a}{1-a} \times (1-u)$.

Hat man z. B. die abnehmende Reihe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, so ist hier das erste Glied $= \frac{1}{2}$, während alle Glieder ächte Brüche sind; um deßwillen ist nach der Formel $S = \frac{a}{1-a} \times (1-u)$ die Summe dieser Progression oder $S = (\frac{1}{2} : (1 - \frac{1}{2})) \times (1 - \frac{1}{64}) = (\frac{1}{2} : \frac{1}{2}) \times (\frac{64}{64} - \frac{1}{64}) = 1 \times \frac{63}{64} = \frac{63}{64}$, was sich auch wirklich so verhält, weil $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$.

I. Zusatz. Das Produkt $\frac{a}{1-a} \times (1-u)$ kömmt dem ersten Faktor $\frac{a}{1-a}$ um so näher, je kleiner u wird, oder je weiter man sich eine solche abnehmende Reihe fortgesetzt denkt; stellt man sich nun die Reihe so verlängert vor, daß $u = 0$, d. h., denkt man sich die Reihe unendlich (III. §. 91. Anm. 2.), so ist die Summe oder $S = \frac{a}{1-a}$.

II. Zusatz: Hat man eine abnehmende unendliche geometrische Reihe, wo das erste Glied a dem Exponenten m nicht gleich ist, und der Exponent, wie vorhin, ein ächter Bruch ist, so ist nach dem im §. 47. B. aufgestellten Lehrsatze die Summe einer sol-

chen Reihe oder $S = \frac{a - am^n}{1 - m} = \frac{a(1 - m^n)}{1 - m}$
$= \frac{a}{1 - m} \times (1 - m^n)$.

Weil m ein ächter Bruch ist, so wird die Potenz m^n immer kleiner, je mehr Glieder vorhanden sind; denkt man sich nun die Reihe unendlich, so wird die Potenz m^n gleich o werden, und die Differenz $1 - m^n$ gleich 1 sein.

Um deßwillen ist dann die Summe einer solchen abnehmenden unendlichen Reihe gleich einem Bruche, dessen Zähler das erste Glied a, und dessen Nenner die Differenz $1 - m$ ist, d. h., $S = \frac{a}{1 - m}$.

§. 51.

I. Aufgabe, die Summe nachstehender unendlichen Reihe zu finden, wenn $\frac{y}{x}$ ein ächter Bruch ist, und alle Glieder positiv sind:

$$\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^5}{x^5} + \ldots\ldots$$

Auflösung:

Man nehme einen Bruch, dessen Zähler $= y$, und dessen Nenner $= x - y$ ist, so gibt dieser Bruch die verlangte Summe, d. h., die Summe dieser Reihe oder S ist $= \frac{y}{x - y}$.

Beweis:

1) Die Summe einer unendlichen Reihe von ächten Brüchen, wo das erste Glied zugleich der gemeinschaftliche Exponent ist, ist gleich einem Bruche, dessen Zähler das erste Glied a, und dessen Nenner die Differenz $1 - a$ ist (§. 50. I. Zus.), d. h., $S = \frac{a}{1 - a}$;

2) In dieser gegebenen unendlichen Reihe von ächten Brüchen (III. §. 72. Zus. II.) ist das erste Glied $a = m = \frac{y}{x}$, daher ist ihre Summe oder S $= \frac{y}{x} : \left(1 - \frac{y}{x}\right)$;

3) Man richte den Bruch ein (III. §. 67. Lehrs. II. Zus.), dividire wirklich (III. §. 67. Lehrs. V.), und verkleinere den Bruch, indem man mit x den Zähler und Nenner dividirt (III. §. 66. d.); man findet dadurch, daß $S = \frac{y}{x} : \left(1 - \frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} : \frac{x-y}{x}$ $= \frac{xy}{x(x-y)} = \frac{y}{x-y}$.

Daher ist z. B. die Summe der unendlichen Reihe

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{2-1} = 1$,

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$,

c) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \ldots = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$,

d) $\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^6}{x^6} + \ldots = \frac{y^2}{x^2 - y^2}$.

Zusatz: Wenn man den Bruch $\frac{y}{x-y}$, wie auch die Brüche $\frac{1}{2-1}$, $\frac{1}{3-1}$, $\frac{1}{4-1}$ und $\frac{y^2}{x^2-y^2}$ nach der im III. Thl. §. 89. angegebenen Vorschrift durch fortgesetzte Division auflöset, so geben die Quotienten die vorstehenden Reihen wieder.

§. 52.

II. Aufgabe, die Summe nachstehender unendlichen Reihe zu finden, wenn wieder

$\frac{y}{x}$ ein ächter Bruch ist, und die Zeichen der Glieder wechseln:

$$\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3} - \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^5}{x^5} - \frac{y^6}{x^6} + \ldots$$

Auflösung:

Man nehme einen Bruch, dessen Zähler $= y$, und dessen Nenner $= x + y$, so gibt dieser Bruch die verlangte Summe, d. h., die Summe dieser Reihe, oder S ist $= \frac{y}{x + y}$.

Beweis:

1) Man theile diese Reihe in zwei andere Reihen A und B, von welchen B die negativen, und A die positiven Glieder enthält;

2) Nach dem vorigen §. ist die Summe der negativen Glieder oder die Reihe $B = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^6}{x^6} + \ldots = \frac{y^2}{x^2 - y^2}$;

3) Man löse die Reihe A, in welcher die positiven Glieder vorkommen, in Faktoren auf (III. §. 87. IV.), da $\frac{y}{x}$ in allen Glieder als Faktor ist; dann setze man im zweiten Faktor nach Nro. 2. mit Weglassung des ersten Gliedes 1 die wirkliche Summe, richte den Bruch ein, und verkleinere ihn, man findet dadurch, daß

$$A = \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{y^5}{x^5} + \frac{y^7}{x^7} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{y}{x}\left(1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^6}{x^6} + \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{y}{x}\left(1 + \frac{y^2}{x^2 - y^2}\right) = \frac{y}{x}\left(\frac{x^2 - y^2 + y^2}{x^2 - y^2}\right)$$

$$= \frac{y}{x} \times \frac{x^2}{x^2 - y^2} = \frac{xy}{x^2 - y^2};$$

4) Man erhält die ganze Summe, wenn man die Summe der negativen Glieder von der Summe der positiven subtrahirt, d. h., $S = A - B$; daher ist

$$S = \frac{xy}{x^2 - y^2} - \frac{y^2}{x^2 - y^2} = \frac{xy - y^2}{x^2 - y^2} = \frac{y(x - y)}{(x + y)\,\overline{x - y}}$$

(III. §. 87. IV. u. VI.).

Folglich ist die Summe einer solchen Reihe oder

$$S = \frac{y}{x + y}.$$

Es ist also z. B. die Summe der unendlichen Reihe

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$,

b) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \ldots = \frac{1}{3 + 1} = \frac{1}{4}$.

Zusatz: Wenn man die Brüche $\frac{y}{x + y}$, $\frac{1}{2 + 1}$, und $\frac{1}{3 + 1}$ nach der im III. Thl. §. 89. gezeigten Verfahrungsweise durch fortgesetzte Division auflöset, so geben die Quotienten die vorstehenden Reihen wieder.

§. 53.

III. Aufgabe, die Summe nachstehender unendlichen Reihe zu finden, bei welcher a das erste Glied, und der gemeinschaftliche Exponent $\frac{b}{c}$ ein ächter Bruch ist:

$$a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} + \ldots$$

Auflösung:

Man setze einen Bruch, dessen Zähler ein Produkt aus dem ersten Gliede in den Nenner des zweiten Gliedes, und dessen Nenner gleich $c - b$ ist, d. h., die Summe einer solchen Reihe oder S ist $= \frac{ac}{c - b}$.

Beweis:

1) Weil a in allen Gliedern der Reihe als Faktor vorkömmt, so löse man dieselbe in Faktoren auf, es ist

$$a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} + \ldots$$
$$= a\left(1 + \frac{b}{c} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{b^4}{c^4} + \ldots\right);$$

2) Der zweite Faktor $1 + \frac{b}{c} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{b^4}{c^4} + \ldots$ drückt eine Reihe aus, deren Summe nach dem II. Zusatze des §. 50. gleich $\frac{a}{1 - m}$ ist; in dieser Reihe ist aber $a = 1$, und $m = \frac{b}{c}$, daher ist ihre Summe oder $S = 1 : \left(1 - \frac{b}{c}\right) = 1 : \left(\frac{c - b}{c}\right) = \frac{c}{c - b}$;

3) Multiplizirt man diesen Bruch mit a, so erhält man $\frac{ac}{c - b}$; es ist also die Summe einer solchen Reihe oder $S = \frac{ac}{c - b}$.

Daher ist z. B. die Summe der unendlichen Reihe

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1 \times 2}{2 - 1} = 2$,

b) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots = \frac{1 \times 3}{3 - 1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Zusatz: Wenn die Zeichen der Glieder wechseln, so ist der Exponent eine negative Größe, und $1 - (- m) = 1 + m$, daher $S = \frac{a}{1 + m}$ und die Summe der Reihe $a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \ldots$ ist

$$= a\left(1 - \frac{b}{c} + \frac{b^2}{c^2} - \frac{b^3}{c^3} + \ldots\right) = a \times \frac{c}{c+b}$$

$$= \frac{ac}{c+b}.$$

§. 54.

IV. Aufgabe, unendliche Dezimalbrüche zu summiren.

Auflösung:

I.

Zu den unendlichen abnehmenden geometrischen Reihen gehören auch die im III. Thl. §. 8. angeführten unendlichen Dezimalbrüche; sie können deßhalb als solche Reihen betrachtet, und durch Addition auf nachstehende Weise in gemeine Brüche verwandelt werden:

1) Die unendlichen Dezimalbrüche der ersten Art (III. §. 8. Nro. 1.), bei welchen immer das nämliche Ziffer wiederholt wird, können allgemein durch 0,bbb .... ausgedrückt werden;

2) Nach dem im III. Thl. §. 2. aufgestellten Lehrsatze ist der Dezimalbruch 0,bbb ... $= \frac{b}{10} + \frac{b}{100} + \frac{b}{1000} + \ldots$

3) In dieser unendlichen geometrischen Reihe ist das erste Glied $= \frac{b}{10}$, und der gemeinschaftliche Exponent $^1/_{10}$, es ist also nach der im II. Zusatze des §. 50. aufgestellten Formel ihre Summe oder S $= \frac{a}{1-m} = \frac{b}{10} : (1 - {}^1/_{10}) = \frac{b}{10} : {}^9/_{10}$ $= \frac{10 \cdot b}{9 \cdot 10} = \frac{b}{9}$;

4) Der Dezimalbruch 0,bbb ... ist nach dem so eben zitirten §. auch $= \frac{bb}{100} + \frac{bb}{10000} + \ldots$, oder

$= \frac{bbb}{1000} + \frac{bbb}{1000000} + \ldots$ ꝛc.; nimmt man nun z. B. die Reihe $\frac{bb}{100} + \frac{bb}{10000} + \ldots$, so ist ihr erstes Glied $= \frac{bb}{100}$, und ihr Exponent $= {}^1/_{100}$, daher ihre Summe oder $S = \frac{a}{1-m} = \frac{bb}{100} : (1 - {}^1/_{100}) = \frac{bb}{100} : {}^{99}/_{100} = \frac{100 \,.\, bb}{99 \,.\, 100} = \frac{bb}{99}$.

Hat man z. B. den unendlichen Dezimalbruch 0,3333 . . . , so ist nach der Formel $S = \frac{b}{9}$ oder $= \frac{bb}{99}$ ꝛc. seine Summe $= {}^3/_9$ oder $= {}^{33}/_{99}$ ꝛc. $= {}^1/_3$.

II.

1) Die unendlichen Dezimalbrüche der zweiten Art (III. §. 8. Nro. 2.), bei welchen zwei, drei, oder mehrere Ziffern wiederholt werden, können, wenn n die Anzahl der wiederholten Ziffern anzeigt, allgemein durch den Ausdruck 0,bc . . . bc . . . bc . . . . bezeichnet, und als die unendliche abnehmende geometrische Reihe $\frac{bc\ldots}{10^n} + \frac{bc\ldots}{10^{2n}} + \frac{bc\ldots}{10^{3n}} \ldots$ betrachtet werden, bei welcher das erste Glied $= \frac{bc\ldots}{10^n}$ und der Exponent $= \frac{1}{10^n}$;

2) Die Summe dieser Reihe (§. 50. Zus. II.) ist $= \frac{a}{1-m}$, somit $= \frac{bc\ldots}{10^n} : \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{bc\ldots}{10^n} : \left(\frac{10^n - 1}{10^n}\right) = \frac{10^n \,.\, bc\ldots}{10^{2n} - 10^n} = \frac{bc\ldots}{10^n - 1}$.

Hat

Hat man z. B. den unendlichen Dezimalbruch 0,296296 . . . . , so ist er, weil hier drei Ziffern wiederholt werden, gleich dem Bruche $\frac{296}{10^3 - 1} = \frac{296}{1000 - 1}$ $= {}^{296}/_{999} = {}^{8}/_{27}$.

III.

1) Hat man unendliche Dezimalbrüche der dritten Art (III. § 8. Nro. 3.), die nach ungleichen Ziffern immer das nämliche Ziffer wiederholen, so können sie als eine Summe aus einem endlichen und einem unendlichen Dezimalbruche betrachtet werden; den ersten dieser Brüche kann man, da ungleiche Ziffern wiederholt werden, durch $\frac{bcd\ldots}{10^n}$, den zweiten durch $\frac{g}{10^{n+1}} + \frac{g}{10^{n+2}} + \ldots$, somit den ganzen unendlichen Dezimalbruch allgemein durch o,bcd . . . gg . . . bezeichnen;

2) Der zweite Bruch $\frac{g}{10^{n+1}} + \frac{g}{10^{n+2}} + \ldots$ drückt eine unendliche Reihe aus, bei welcher das erste Glied $= \frac{g}{10^{n+1}}$, und der Exponent $= {}^1/_{10}$; die Summe dieser Reihe oder S ist $= \frac{a}{1 - m} = \frac{g}{10^{n+1}}$ $: (1 - {}^1/_{10}) = \frac{g}{10^{n+1}} : {}^9/_{10} = \frac{10 \cdot g}{9 \cdot 10^{n+1}}$ $= \frac{g}{9 \cdot 10^n}$;

3) Bringt man den endlichen und unendlichen Dezimalbruch in eine Summe, so ist die Summe des

gegebenen Bruches $= \frac{bcd\ldots}{10^n} + \frac{g}{9 \cdot 10^n} = \frac{9 \cdot bcd\ldots}{9 \cdot 10^n}$
$+ \frac{g}{9 \cdot 10^n} = \frac{9 \cdot bcd\ldots + g}{9 \cdot 10^n}$.

Hat man z. B. den unendlichen Dezimalbruch 0,4166 ..., so ist er nach der vorstehenden Formel $= \frac{9 \times 41 + 6}{9 \times 10^2} = \frac{369 + 6}{900} = {}^{375}/_{900} = {}^{5}/_{12}$.

Durch diese drei Auflösungen sind die Regeln als allgemein giltig erwiesen, nach welchen im III. Thl. §. 10. bei Nro. 1. und 2. die unendlichen Dezimalbrüche in gemeine Brüche verwandelt wurden.

Anmerkung: Von den vieleckigen oder Polygonalzahlen, wie auch von den Reihen eines höheren Grades wird bei einer anderen Veranlassung die Rede sein.

IV. Hauptstück.

Von den Logarithmen.

I. Abschnitt.

Von den Logarithmen überhaupt.

§. 55.

Erklärungen.

a) Unter einem Logarithmus versteht man den Exponenten jener Würde, zu der eine Zahl erhoben wird, um eine andere hervorzubringen.

Wenn demnach $b^n = a$, so ist n der Logarithmus von a, weil b zur $n$ten Würde erhoben die Zahl a gibt; so ist z. B. 2 in Absicht auf die Zahl 10 der Logarithmus von 100, und die Zahl 3 der Logarithmus von 1000, weil $10^2 = 100$, und $10^3 = 1000$.

b) Die Zahl b, welche potenzirt wird, um andere Zahlen auszudrücken, wird die Grundzahl oder Basis genannt.

Wenn $b^n = a$, dann $b^g = m$ ꝛc., so ist b die Grundzahl oder Basis, gleichwie in dem vorhin angeführten Beispiele 10 die Grundzahl war, weil man diese Zahl zu Potenzen erhoben hat, um andere Zahlen auszudrücken.

c) Nimmt man eine bestimmte Zahl zur Basis, und erhebt man diese zu Potenzen, um jede Zahl zu erhalten, so hat man das, was ein logarithmisches System, oder ein Logarithmen-System genannt wird.

So lange man die nämliche Grundzahl potenzirt, hat man auch das nämliche oder einerlei System;

hingegen aber sind die Systeme von verschiedenen Grundzahlen verschieden.

d) Setzet man die beiden Reihen A und B an, welche im II. Zusatze des §. 46. vorkommen, so sind nach dem III. Zusatze dieses §. die Glieder der Reihe B der Ordnung nach die Logarithmen der oben stehenden Glieder der Reihe A, bei welchen das zweite Glied m die Basis oder Grundzahl ist.

Weil die Glieder der Reihe B zugleich die Anzahl der Verhältnisse bestimmen, aus welchen das Verhältniß von 1 zu den Gliedern der Reihe A zusammengesetzt ist (§. 46. Zus. II.), so werden dieselben von den griechischen Wörtern ἀριθμοσ (Zahl) und λόγοσ (Verhältniß) Logarithmen genannt, d. h., solche Zahlen, welche die Anzahl von Verhältnissen (ἀριθμόν λόγων) angeben.

e) Den Logarithmus einer Zahl bezeichnet man kurz dadurch, daß man ihr Log. oder auch nur L. vorsetzet; will man daher z. B. den Logarithmus von m bezeichnen, so schreibt man Log. m oder auch L. m.

I. Zusatz: Als Grundzahl kann außer 1 jede beliebige Zahl angenommen werden (§. 46. Zus. V.); es sind daher unzählig viele logarithmische Systeme möglich.

II. Zusatz: In jedem Systeme ist der Logarithmus von 1 gleich 0, und der Logarithmus von der Grundzahl gleich 1, weil jede Zahl mit dem Exponenten 0 gleich 1, und eine Größe mit dem Exponenten 1 die unveränderte Größe selbst ist (III. §. 77. Zus. II. und III. §. 74. Zus. II.), und somit $b^0 = 1$, und $b^1 = b$, weßhalb allemal Log. $1 = 0$, und Log. $b = 1$, oder $0 =$ Log. 1, und $1 =$ Log. b.

III. Zusatz: Im nämlichen Systeme gehören zu gleichen Zahlen gleiche Logarithmen, und in verschiedenen Systemen gehören zu gleichen Zahlen verschiedene Logarithmen.

Drückt b die Grundzahl aus, und bezeichnen die Buchstaben m und n die gleichen Zahlen, und q und z die Exponenten, so ist $b^q = m$, $b^z = n$, also auch, weil nach der Voraussetzung $m = n$, die Po-

tenz $b^q = b^z$; bei gleichen Potenzen von gleichen Urgrößen müssen auch die Exponenten gleich sein (III. §. 70. I.), deßwegen ist $q = z$, und Log. $m =$ Log. n, das ist, im nämlichen Systeme gehören zu gleichen Zahlen gleiche Logarithmen.

Sind die logarithmischen Systeme und somit auch die Grundzahlen verschieden, so müssen diese offenbar zu verschiedenen Potenzen erhoben werden, um die nämlichen Zahlen hervorzubringen, d. h., in verschiedenen Systemen gehören zu gleichen Zahlen verschiedene Logarithmen.

IV. Zusatz: Umgekehrt entsprechen im nämlichen Systeme gleichen Logarithmen gleiche Zahlen, und in verschiedenen Systemen gehören zu gleichen Logarithmen verschiedene Zahlen.

Sind die Logarithmen gleich, so ist $q = z$, und deßhalb auch $b^q = b^z$, weil bei gleichen Größen alle Potenzen von einerlei Grade gleich sind (III. §. 70. I.); ferner ist $b^q = m$, und $b^z = n$, daher auch $m = n$, das ist, in einerlei Systeme entsprechen gleichen Logarithmen gleiche Zahlen.

Sind die Systeme verschieden, so sind es auch die Grundzahlen, und bei ungleichen Zahlen sind die Potenzen von einerlei Grade verschieden (III. §. 70. II.); um deßwillen gehören in verschiedenen Systemen zu gleichen Logarithmen verschiedene Zahlen.

V. Zusatz: In jedem logarithmischen Systeme, wo die Grundzahl größer ist als 1, sind die Logarithmen der Zahlen, welche die Einheit übersteigen, positiv, und die Logarithmen der ächten Brüche sind negativ; indem $b^q = m$, und $m > 1$, wenn q eine positive Zahl ist, da hingegen $m < 1$ oder ein ächter Bruch ist, wenn der Exponent q oder der Logarithmus negativ ist (III. §. 72. und III. §. 77. Zus. III.).

VI. Zusatz: Wenn die Grundzahl b kleiner ist als 1, so ist $m < 1$, wenn der Exponent q positiv ist, und $m > 1$, wenn der Exponent q oder der Logarithmus negativ ist; d. h., in jedem logarithmischen Systeme, wo die Grundzahl kleiner ist als 1, sind die

Logarithmen der ächten Brüche positiv, und die Logarithmen der Zahlen, welche die Einheit übersteigen, sind negativ.

Anmerkung: Es ist am Füglichsten, wenn man für die Grundzahl eine positive Zahl annimmt, die größer ist als 1; dadurch erhalten nur die positiven Zahlen reelle Logarithmen, und die Logarithmen der negativen Zahlen werden unmöglich, während dann, je größer die Zahl, desto größer auch der dazu gehörige Logarithmus ist.

§. 56.

I. Lehrsatz:

Der Logarithmus eines Produktes ist der Summe der Logarithmen der Faktoren gleich; d. h.

$$\text{Log. } mn = \text{Log. } m + \text{Log. } n.$$

Beweis:

1) Für die Grundzahl b ist

$b^q = m$, mithin $q = \text{Log. } m$,

$b^z = n$ $\quad z = \text{Log. } n$;

2) Gleiches mit Gleichem multiplizirt gibt Gleiches, und Gleiches zu Gleichem addirt gibt Gleiches:

$b^q = m$, $\qquad q = \text{Log. } m$,

$b^z = n$, $\qquad z = \text{Log. } n$,

also $b^{q+z} = mn$, mithin $q + z = \text{Log. } m + \text{Log. } n$;

3) Weil $b^{q+z} = mn$,

so ist $q + z = \text{Log. } mn$,

und nach Nro. 2 ist $q + z = \text{Log. } m + \text{Log. } n$,

folglich $\text{Log. } mn = \text{Log. } m + \text{Log. } n$.

Man erhält also den Logarithmus eines Produktes, wenn man die Logarithmen der Faktoren addirt; daher ist z. B. Log. (15×9) = Log. 15 + Log. 9.

Zusatz: Aus den Logarithmen der Primzahlen (II. §. 10. c) erhält man die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen (II. §. 10. d); so ist z. B. Log. 7 + Log. 2 = Log. 14, weil $14 = 7 \times 2$,

und zu gleichen Zahlen gleiche Logarithmen gehören (§. 55. Zus. III.), somit nach dem hier aufgestellten 1. Lehrsatze Log. 7 + Log. 2 = Log. 14.

§. 57.

II. Lehrsatz:

Man erhält den Logarithmus eines Quotienten, wenn man vom Logarithmus des Dividends den Logarithmus des Divisors abzieht; d. h.,

$$\text{Log.}\,\frac{m}{n} = \text{Log.}\,m - \text{Log.}\,n.$$

Beweis:

1) $b^q = m$, mithin $q = \text{Log.}\,m$,
$b^z = n$, $z = \text{Log.}\,n$;

2) Gleiches mit Gleichem dividirt gibt Gleiches, und Gleiches von Gleichem subtrahirt gibt Gleiches:

$$b^q = m, \qquad q = \text{Log.}\,m,$$
$$b^z = n, \qquad z = \text{Log.}\,n,$$

also $b^{q-z} = \frac{m}{n}$, mithin $q - z = \text{Log.}\,m - \text{Log.}\,n$;

3) Weil $b^{q-z} = \frac{m}{n}$, so ist

$$q - z = \text{Log.}\,\frac{m}{n},$$

und nach Nro. 2 ist $q - z = \text{Log.}\,m - \text{Log.}\,n$;

folglich ist $\text{Log.}\,\frac{m}{n} = \text{Log.}\,m - \text{Log.}\,n.$

Man erhält also den Logarithmus eines Quotienten, wenn man vom Logarithmus des Dividends den Logarithmus des Divisors abzieht; daher ist z. B. Log. (18 : 6) = Log. 18 — Log. 6.

Zusatz: Man erhält den Logarithmus eines Bruches, wenn man vom Logarithmus des Zählers den des Nenners subtrahirt, indem man den Bruch als

einen Quotienten betrachten kann (III. §. 66. b.); um deßwillen ist z. B. Log. $^{12}/_5$ = Log. 12 — Log. 5.

§. 58.

III. Lehrsatz:

Der Logarithmus von der Potenz einer Zahl ist ein Produkt aus dem Exponenten in den Logarithmus der Zahl; d. h.,

$$\text{Log. } a^n = \text{Log. } a \times n = n \text{ Log. } a.$$

Beweis:

1) Wenn b die Grundzahl des Systemes ausdrückt, und z den Exponenten der Potenz, zu der man b erhebt, um a zu erhalten, so ist $b^z = a$, und z = Log. a;

2) Bei gleichen Zahlen sind die Potenzen von einerlei Grade gleich (III. §. 70. I.), daher ist $b^{nz} = a^n$, und nz = Log. a^n.

3) Nach Nro. 1 ist $z = \text{Log. } a$,
dann $n = n$,
mithin $nz = n \text{ Log. } a$,
ferner nach Nro. 2 ist $nz = \text{Log. } a^n$,
folglich ist $\text{Log. } a^n = n \text{ Log. } a = \text{Log. } a \times n$.

Man erhält also den Logarithmus einer Potenz, wenn man den Logarithmus der Urgröße mit dem Exponenten multiplizirt; daher ist z. B. Log. 24^3 = Log. $24 \times 3 = 3$ Log. 24.

§. 59.

IV. Lehrsatz:

Der Logarithmus einer Wurzelgröße ist dem Quotienten gleich, den man erhält, wenn man den Logarithmus der Größe durch den Exponenten der Wurzel dividirt; d. h.,

$$\text{Log. } \sqrt[n]{a} = \text{Log. } a : n = \frac{\text{Log. } a}{n}.$$

Beweis:

1) Wenn die Buchstaben a, b und z die vorige Bedeutung haben, so ist $b^z = a$, und $z =$ Log. a;

2) Bei gleichen Zahlen sind die Wurzeln von einerlei Grade gleich (III. §. 70. I.), daher ist $\sqrt[n]{b^z} = \sqrt[n]{a}$, und $b^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a}$, weil die Wurzel dadurch ausgezogen wird, daß man den Exponenten der Größe mit dem Exponenten des Wurzelzeichens dividirt (III. §. 78. Zus. I.);

3) Nach Nro. 1 ist $z =$ Log. a,
dann $n = n$,

mithin $\frac{z}{n} = \frac{\text{Log. a}}{n}$,

nach Nr. 2 ist $b^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a}$, also $\frac{z}{n} =$ Log. $\sqrt[n]{a}$,

folglich ist Log. $\sqrt[n]{a} = \frac{\text{Log. a}}{n} =$ Log. a : n.

Man bekömmt also den Logarithmus einer Wurzelgröße, wenn man den Logarithmus der Urgröße mit dem Exponenten des Wurzelzeichens dividirt; daher ist z. B. Log. $\sqrt[3]{418}$ $=$ Log. 418 : 3 $= \frac{\text{Log. 418}}{3}$.

Der Beweis in Absicht auf diesen Lehrsatz hätte auch kürzer auf diese Weise geführt werden können:

Nach der im III. Thl. §. 78. Zus. I. aufgestellten Regel ist $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, und deßhalb nach dem im vorigen §. aufgestellten III. Lehrsatze Log. $\sqrt[n]{a} =$ Log. $a^{\frac{1}{n}}$ $=$ Log. a $\times \frac{1}{n} = \frac{\text{Log. a}}{n} =$ Log. a : n.

§. 60.

V. Lehrsatz:

Wenn die Zahl B die mittlere geometrische Proportionalzahl zu den Zahlen A und C ist, so ist der Logarithmus von B die mittlere arithmetische Proportionalzahl zu den Logarithmen von A und C; d. h., wenn A : B : C, so verhält sich Log. A — Log. B — Log. C.

Beweis:

1) Wenn A : B : C, so ist nach dem Zusatze des §. 37. die mittlere geometrische Proportionalzahl $B = \sqrt{AC}$;

2) Zu gleichen Zahlen gehören im nämlichen Systeme gleiche Logarithmen (§. 55. Zus. III.), überdieß ist der Logarithmus eines Produktes die Summe der Logarithmen der Faktoren (§. 56.), und der Logarithmus einer Wurzelgröße dem Quotienten gleich, den man erhält, wenn man den Logarithmus der Urgröße mit dem Exponenten des Wurzelzeichens dividirt (§. 59.), daher ist $\text{Log. } B = \frac{\text{Log. } A + \text{Log. } C}{2}$, und deßhalb auch $2 \text{ Log. } B = \text{Log. } A + \text{Log. } C$;

3) Wenn die Summe zweier Zahlen dem Duplum einer anderen Zahl gleich ist, so kann man diese Zahlen nach Vorschrift des §. 24. Zus. V. in eine stättige arithmetische Proportion setzen, um deßwillen bekömmt man die Proportion Log. A — Log. B — Log. C.

Daher verhält sich z. B. Log. 4 — Log. 6 — Log. 9, weil 4 : 6 : 9.

II. Abschnitt.

Von den briggischen oder gemeinen Logarithmen, und zwar von ihren vorzüglichsten Eigenschaften und ihrer Berechnung.

§. 61.

Erklärungen.

a) Unter dem gemeinen, dekadischen oder briggischen logarithmischen Systeme versteht man jenes System, wo die Grundzahl $b = 10$ gesetzt, und somit diese Zahl potenzirt wird, um jede andere Zahl auszudrücken.

Dieses System wird auch das gewöhnliche logarithmische System genannt, und am meisten in der Mathematik gebraucht.

b) Die Logarithmen selbst von diesem Systeme heißen gemeine oder briggische Logarithmen.

c) Weil man jeden briggischen Logarithmus durch einen Dezimalbruch ausdrückt, der gewöhnlich 7 Dezimalstellen enthält, so nennt man die in demselben vorkommende ganze Zahl die Karakteristik oder das Kennziffer, die Dezimalziffern hingegen die Mantisse (Zugabe), welche vom Kennziffer entweder durch das bei den Dezimalen gewöhnliche Komma (,), oder auch durch einen Punkt (.) getrennt wird.

I. Zusatz: Im gemeinen logarithmischen Systeme ist 10 die Grundzahl, und daher das zweite Glied der im §. 46. Zus. V. vorkommenden geometrischen Reihe A, für welche die arithmetische Reihe B der Ordnung nach die briggischen Logarithmen angibt; indem $10^0 = 1$, dann $10^1 = 10$, ferner $10^2 = 100$ ꝛc.

II. Zusatz: Weil die so eben angeführten Reihen A und B zunehmende Reihen sind, so gehören im briggischen Systeme zu größeren Zahlen größere Logarithmen, und zu kleineren Zahlen kleinere Loga-

rithmen; d. h., wenn m > n, so ist Log. m > Log. n, und umgekehrt, wenn m < n, so ist Log. m < Log. n.

III. Zusatz: Von allen Zahlen, welche nicht als Glieder der erwähnten Reihe A, die man sich in Absicht auf größere Zahlen weiter fortgesetzt vorstellt, vorkommen, sind die gemeinen Logarithmen Brüche, und zwar für die Zahlen zwischen 1 und 10 ächte, und für die übrigen größeren Zahlen unächte Brüche; weil 1 der Logarithmus der Grundzahl 10, und 0 der Logarithmus von 1 ist (§. 55. Zus. II.), und somit in diesem Systeme wegen der angenommenen Grundzahl 10 die Zahlen, die zwischen 1 und 10 liegen, Logarithmen haben, die kleiner sind als 1, und die übrigen höheren Zahlen solche Logarithmen erhalten, die größer sind als 1.

Die Logarithmen der Zahlen 1 „ 10 „ 100 „ 1000 „ . . ., welche als Glieder der Reihe A vorkommen, werden auch in der Gestalt der Dezimalbrüche dargestellt, indem man nach der Karakteristik, welche 0 oder eine der ganzen Zahlen 1 „ 2 „ 3 „ 4 ꝛc. ist, das Komma oder den Punkt schreibt, und dann zur rechten Seite die Dezimastellen mit 7 Nullen ausfüllt (III. §. 6.); daher ist z. B. der Log. 100 = 2,0000000, oder auch = 2.0000000.

IV. Zusatz: Im briggischen logarithmischen Systeme sind die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 kleiner als 1 und größer als 0, die Logarithmen der Zahlen zwischen 10 und 100 bestehen aus einer Einheit sammt einem Bruche, die der Zahlen zwischen 100 und 1000 aus zwei Einheiten nebst einem Bruche, und überhaupt bestehen in diesem Systeme die Logarithmen der ganzen Zahlen, die in der fortgesetzten geometrischen Reihe A des §. 46. Zus. V. nicht als Glieder vorkommen, aus so viel Einheiten, als die ganze Zahl Ziffern hat weniger 1, sammt beigefügten Brüchen, welche man auf dem Wege der Annäherung durch Dezimalbrüche ausdrückt, und die der Wahrheit um so näher kommen, je mehr Dezimalen bestimmt werden.

Hat demnach eine gegebene Zahl n Ziffern, so ist

die Karakteristik ihres Logarithmus $= n - 1$, und umgekehrt muß die ganze Zahl $n + 1$ Ziffern haben, sobald die Karakteristik ihres Logarithmus $= n$ ist; so ist z. B. für eine ganze Zahl von vier Ziffern das Kennziffer $= 4 - 1 = 3$, und zu einem Logarithmus, dessen Kennziffer z. B. $= 4$ ist, gehört eine ganze Zahl von fünf Ziffern.

Das Ziffer des Logarithmus, welches links vor dem Komma oder Punkte steht, und die ganzen Einheiten anzeigt, wird deßwegen Karakteristik oder Kennziffer genannt, weil man aus der Größe der Karakteristik erkennt, wie viele ganze Ziffern die zum gegebenen Logarithmus gehörige Zahl haben muß, gleichwie man umgekehrt die Größe der Karakteristik aus der bekannten Anzahl der Ziffern der ganzen Zahl bestimmen kann.

V. Zusatz: Man erhält den Logarithmus eines ächten Bruches, wenn man vom Logarithmus des Nenners den Logarithmus des Zählers subtrahirt, und dem Reste das Zeichen — gibt; d. h., wenn $a < b$, so ist $\text{Log. } \frac{a}{b} = - (\text{Log. } b - \text{Log. } a) = - \text{Log. } \frac{b}{a}$.

Jeder Bruch kann als ein Quotient betrachtet werden (III. §. 66. b.), und den Logarithmus eines Quotienten erhält man, wenn man den Logarithmus des Divisors von dem des Dividends subtrahirt (§. 57. Lehrs. II.); daher ist der $\text{Log. } \frac{a}{b} = \text{Log } (a : b) = \text{Log. } a - \text{Log. } b$. Weil ferner b größer ist, so subtrahirt man die kleinere Zahl von der größeren, und gibt das Zeichen — dem zum Vorscheine kommenden Reste (III. §. 50. Zus. II.); um deßwillen ist $\text{Log. } \frac{a}{b} = \text{Log. } a - \text{Log. } b = - (\text{Log. } b - \text{Log. } a) = - \text{Log. } \frac{b}{a}$, so ist z. B. $\text{Log. } {}^3\!/\!_4 = \text{Log. } 3 - \text{Log. } 4 = - \text{Log. } 4 + \text{Log. } 3 = - (\text{Log. } 4 - \text{Log. } 3) = - \text{Log. } {}^4\!/\!_3$.

VI. Zusatz: Zwei Brüche, wovon einer der

umgekehrte vom andern ist, haben gleiche, aber entgegengesetzte Logarithmen; d. h., Log. $\frac{a}{b} = -$ Log. $\frac{b}{a}$.

VII. Zusatz: Im briggischen Systeme haben ganze Zahlen und unächte Brüche positive, ächte Brüche aber negative Logarithmen; und umgekehrt gehören in diesem Systeme zu positiven Logarithmen ganze Zahlen oder unächte Brüche, und zu negativen Logarithmen ächte Brüche (§. 55. Zus. V.); daher ist z. B. Log. $^1/_{10} = -1$, Log. $^1/_{100} = -2$, Log $^1/_{1000} = -3$ ꝛc., indem nach dem im III. Thl. §. 77. aufgestellten III. Zusatze $10^{-1} = {}^1/_{10}$, dann $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = {}^1/_{100}$, ferner $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = {}^1/_{1000}$ ꝛc.

Anmerkung: In Fällen, wo wegen Abkürzung der Rechnungen zu negativen Zahlen die dazu gehörigen Logarithmen zu suchen sind, sehe man während der Rechnung die negativen Zahlen als positiv an, und nehme am Ende der Rechnung auf die Zeichen — der gegebenen Zahlen die gehörige Rücksicht.

Wenn hingegen bei der Bestimmung irgend einer gesuchten Größe x diese durch einen Ausdruck des Logarithmus einer negativen Zahl gefunden wird, und z. B. $x = m \pm$ Log. $(-n)$, so ist da Log. $(-n)$ ein unmöglicher Ausdruck, und der gesuchte Werth von x, wenn m eine mögliche oder wirkliche Größe ist, unmöglich.

Die Logarithmen der negativen Zahlen sind nicht gedenkbar, weil in der Gleichung $10^q = m$ kein solcher Werth vom Exponenten q gedacht werden kann, daß die Zahl m negativ würde.

§. 62.

I. Aufgabe, den briggischen Logarithmus für die Zahl 5 bis auf sieben Dezimalstellen zu finden.

Auflösung:

1) Die Zahl 5 liegt in Absicht auf die geometrische Reihe A des §. 46. Zus. V. zwischen den zwei ersten Gliedern 1 und 10; um deßwillen nehme man die nächst kleinere Zahl 1, welche in der Reihe vor-

kömmt, und die nächst größere Zahl 10, setze jene = A, diese = B, und suche zu beiden die mittlere geometrische Proportionalzahl C, es ist nach §. 37. $C = \sqrt{AB}$, und somit in diesem Beispiele nach den im III. Thl. 30. aufgestellten Regeln $C = \sqrt{(1 \times 10)} = \sqrt{10} = 3{,}162277\ldots$;

2) Aus der Reihe B des §. 46. Zus. V. nehme man den Logarithmus von A, und den von B, jener ist = 0, und dieser = 1, weil Log. 1 = 0, und Log. 10 = 1 (§. 55. Zus. II.);

3) Weil C zu A und B die mittlere geometrische Proportionalzahl ist, so ist nach dem V. Lehrsatze des §. 60. der Log. C = ½ (Log. A + Log. B), und daher Log. 3,162277 = ½ (Log. 1 + Log. 10) = ½(0 + 1) = ½ = 0, 5 = 0, 5000000, da der Werth eines Dezimalbruches durch die zur rechten Seite beigesetzten Nullen nicht verändert wird (III. §. 4. A.);

4) Man suche auf's Neue zu den Zahlen C = 3,162277 und B = 10, zwischen welchen als genaueren Grenzzahlen die gegebene Zahl 5 liegt, die mittlere geometrische Proportionalzahl D, und zwischen ihren Logarithmen die mittlere arithmetische Proportionalzahl, somit den Log. D.

Es ist $D = \sqrt{BC} = \sqrt{(10 \times 3{,}162277)} = \sqrt{31{,}62277} = 5{,}623413$, und Log. D = ½ (Log. B + Log. C) = ½(1 + 0,5) = ½ × 1,5 = 0,75 = 0,7500000.

5) Man setze dieses Verfahren so lange fort, bis man auf die mittlere geometrische Proportionalzahl 5,000000.... kömmt, welche nicht um 0,000001 von der gegebenen Zahl 5 unterschieden ist, und deßhalb ohne merklichen Fehler anstatt dieser angenommen werden kann (§. 61. Zus. IV.);

6) Zur Zahl 5,000000.... suche man den Logarithmus als die mittlere arithmetische Proportionalzahl, derselbe ist = 0,6989700; um deßwillen ist der briggische Logarithmus von 5, im Falle derselbe bis auf sieben Dezimalstellen bestimmt wird, gleich 0,6989700, oder Log. 5 = 0,6989700.

Zusatz: Durch die Logarithmen der Zahlen 10

und 5 ist der Logarithmus der Primzahl 2 gegeben, weil 2 = $^{10}/_{5}$, und deßhalb Log. 2 = Log. 10 — Log. 5; d. h.,

$$\text{Log. } 10 = 1{,}0000000,$$
$$\text{Log. } 5 = 0{,}6989700,$$

daher Log. $^{10}/_{5}$ = Log. 2 = 0,3010300.

§. 63.

II. Aufgabe, die Logarithmen für alle ganzen Zahlen zu finden.

Auflösung:

1) Die Logarithmen für die Primzahlen 3, 7, 11 ꝛc. bestimme man nach der im vorigen §. bei der Bestimmung des briggischen Logarithmus von 5 angegebenen Verfahrungsweise, indem man so lange zwischen den bekannten Grenzzahlen der gegebenen Zahl die mittlere geometrische Zahl, und dazu die entsprechende arithmetische Proportionalzahl sucht, bis man eine solche Zahl gefunden hat, die ohne merklichen Fehler für die gesuchte Zahl, zu der die entsprechende arithmetische Proportionalzahl den Logarithmus gibt, angenommen werden kann;

2) In Absicht auf die zusammengesetzten Zahlen, welche als Produkte aus Primzahlen oder anderen zusammengesetzten Zahlen betrachtet werden können, mache man die Berechnung nach dem im §. 56. aufgestellten I. Lehrsatze.

So ist z. B. Log. 20 = Log. = 10 † Log. 2 = 1,0000000 † 0,3010300 = 1,3010300; weil 20 = 10 × 2, und deßhalb Log. 20 = Log. 10 † Log. 2.

Anmerkung: 1) Es ist schon bemerkt worden, daß im briggischen logarithmischen Systeme die Logarithmen aller Zahlen, die nicht als Glieder der im V. Zusatze des §. 46. bei A angeführten Reihe 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, ... vorkommen, durch Annäherung bestimmt sind.

2) Viel einfacher und bequemer, als durch die Bestimmung der Proportionalzahlen, können die Logarithmen mittels der Auflösung der Funktionen in Reihen, die aber in diesem Lehrbuche noch nicht vorgetragen wurden, berechnet werden.

3)

3) Wenn man eine Tabelle aufstellet, worin zu den in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen für die angenommene Grundzahl 10 die entsprechenden Logarithmen anzutreffen sind, und diese Tabelle so einrichtet, daß man sowohl zu jeder gegebenen Zahl den dazu gehörigen Logarithmus, als auch zu jedem gegebenen Logarithmus die entsprechende Zahl bequem und geschwind aufsuchen kann, so hat man das briggische logarithmische System, wodurch große Berechnungen ungemein abgekürzt werden, weil man mittels der Logarithmen die Multiplikation in eine bloße Addition (§. 56.), die Division in eine bloße Subtraktion (§. 57.), die Erhebung zu Potenzen in eine einfache Multiplikation (§. 58.), und die Ausziehung der Wurzeln in eine einfache Division (§. 59.) verwandeln kann.

4) Die in den §§. 62. u. 63. angegebene Auflösung der I. u. II. Aufgabe hat nicht zum Zwecke, daß man auf diese Weise wirklich die Logarithmen der Zahlen berechnen soll, weil sie schon berechnet, und in zweckmäßig eingerichteten Tabellen zusammengestellt sind; dieselbe zeigt nur den mühsamen Weg, den man anfangs zur Berechnung der Logarithmen einschlug, weßhalb ich auch im §. 62. zur Bestimmung des briggischen Logarithmus von 5 die Berechnung in Absicht auf die verlangten sieben Dezimalen nicht vollständig ausführte, und mich damit begnügte, daß ich nur die dabei zu benützenden Regeln anführte.

5) Joh. Neper, Baron von Merchiston, ein Schottländer, lieferte zuerst ein wirkliches Logarithmen-System, und gab solches zu Edinburg im Jahre 1614 unter dem Titel heraus: Mirifici logarithmorum canonis descriptio.

Heinrich Brigg, Professor der Geometrie zu Oxford, berechnete für die Basis 10 die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 20000, und für die Zahlen von 90000 bis 100000. Von seinem Namen werden die gemeinen Logarithmen die briggischen genannt.

Adrian Vlacq, ein Holländer, machte die Berechrechnung der Logarithmen für die Zahlen von 20000 bis 90000. Seine Tabellen wurden zu Frankfurt im Jahre 1790 von Joh. Jak. Ebert herausgegeben, und sind unter dem Titel bekannt: Adriani Vlacq tabulae sinuum &c. et logarithmorum sinuum, tangentium et numerorum ab 1 ad 10000. Editio nova, emendata et aucta.

Unter den neueren Ausgaben logarithm. Tabellen verdienen nebst den Sammlungen von Joh. Karl Schulze (Berlin 1778) die logarithm. Tabellen von Georg Freiherrn von Vega eine besondere Erwähnung. Das logarithmisch trigonometrische Handbuch des letzteren, von

dem wir gegenwärtig die dritte, in der Weidmannischen Buchhandlung zu Leipzig im Jahre 1811 erschienene Auflage besitzen, ist den Anfängern wegen seiner Korektheit, und bequemen Benützung vorzüglich zu empfehlen.

6) Weil meine Schüler zu ihren logarithmischen Berechnungen das erwähnte logarithmisch trigonometrische Handbuch von Georg Vega in Handen haben, so werde ich mich in der Folge, wenn von dem Aufschlagen und der Anwendung der briggischen Logarithmen die Rede ist, mehrentheils auf diese Tabellen beziehen.

III. Abschnitt.

Vom Gebrauche der Tabellen der gemeinen oder briggischen Logarithmen.

§. 64.

I. Aufgabe, die Logarithmen der ganzen Zahlen, welche in den vorliegenden Tabellen vorkommen, zu finden.

Auflösung:

1) Man schlage die logarithmischen Tabellen nach jener Anweisung auf, die ihnen gewöhnlich beigefügt ist, im Falle ihre Einrichtung nicht schon an und für sich einleuchtend ist;

2) Steht bei der Mantisse die Karakteristik nicht, wie dieses bei Vega in Absicht auf die größeren Zahlen der Fall ist, so bestimme man sich dieselbe nach der Anzahl der in der gegebenen ganzen Zahl vorkommenden Ziffern (§. 61. Zus. IV.).

Man findet auf diese Weise z. B., daß 2,6702459 der Logarithmus von 468 ist; oder Log. 468 = 2,6702459 und Log. 54681 = 4,7378364 ist.

Anmerkung: In der Folge versteht man unter dem Ausdrucke „Logarithmus“ allemal den gemeinen oder briggischen Logarithmus, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist.

§. 65.

II. Aufgabe, für eine ganze Zahl den Logarithmus zu finden, wenn sie nebst einigen am Ende beigefügten Nullen nicht mehrere Ziffern hat, als in den Tabellen noch vorkommen.

Auflösung:

1) Man suche nach der Vorschrift des vorigen §. mit Hinweglassung der Nullen für die Zahl den Logarithmus; und

2) vermehre das Kennziffer des gefundenen Logarithmus um so viele Einheiten, als die gegebene Zahl Nullen nach den Zahlziffern enthält.

Daher ist z. B. der Logarithmus von 3456000 = 6,5385737, weil man die Zahl 3456000 als ein Produkt aus den Faktoren 3456 und 1000 betrachten kann, und der Logarithmus eines Produktes der Summe der Logarithmen der Faktoren gleich ist (§. 56.), und somit Log. 3456000 = Log. (3456 × 1000) = Log. 3456 + Log. 1000 = 3,5385737 + 3,0000000 = 6,5385737.

Anmerkung: Die Logarithmen bestehen nur aus einer ganzen Zahl, welche das Kennziffer ist, und den beigefügten Dezimalen, welche die Mantisse bilden (§. 61. c.); um deßwillen ist die Rechnung damit nach den in Betreff der Dezimalbrüche im III. Thl. I. Hauptstück I. Abschnitt aufgestellten Regeln sehr bequem.

§. 66.

III. Aufgabe, zu einer ganzen Zahl, welche aus mehreren Ziffern besteht, als in der Tabelle vorkommen, den Logarithmus zu finden.

Auflösung:

1) Wenn man drei unmittelbar auf einander folgende, aber nicht weit von einander abstehende große Zahlen mit ihren Logarithmen vergleicht, so findet man, daß sich die Unterschiede der Zahlen, wie die der Logarithmen verhalten, und somit jene Differenzen mit

diesen gerade proportionirt sind, d. h., wenn A, B und C der Ordnung nach solche Zahlen bezeichnen, so verhält sich
$C - A : B - A = \text{Log.}\, C - \text{Log.}\, A : \text{Log.}\, B - \text{Log.}\, A$;

2) Man setze das letzte Glied dieser Proportion, somit die Differenz Log. B — Log. A = d, und man findet durch Transponiren (III. §. 96. Zus. I.), daß Log. B = Log. A + d; d. h., man erhält den Logarithmus der mittleren Zahl B, wenn man den gefundenen Unterschied d zum Logarithmus der kleineren Zahl A addirt;

3) Von diesen drei Zahlen bezeichne die mittlere B die gegebene ganze Zahl, zu welcher der Logarithmus zu finden ist, während durch A die kleinere, und durch C die größere Zahl ausgedrückt wird;

4) Diese beiden Zahlen A und C nehme man so an, daß sie nebst den am Ende beigefügten Nullen aus so vielen Ziffern bestehen, als in der Tabelle vorkommen, weßhalb da ihre Logarithmen nach §. 65. gefunden werden können;

5) Man suche den Logarithmus von A und C, und nehme den Unterschied dieser Logarithmen, somit die Differenz Log. C — Log. A;

6) In der Proportion bei Nro. 1. suche man zu den Differenzen der Zahlen C — A und B — A, und zur Differenz Log. C — Log. A nach §. 36. die vierte geometrische Proportionalzahl, welche, nach Nro. 2. zum Logarithmus der Zahl A addirt, den gesuchten Logarithmus der gegebenen Zahl B gibt.

Beispiel:

Es sei zur Zahl 234568 der Logarithmus nach dem erwähnten Handbuche von Vega zu finden, in welchem unmittelbar nur die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 101000 vorkommen.

I. Auflösung:

1) Die nächst kleinere Zahl mit einer am Ende beigefügten Null ist 234560, und die nächst größere solche Zahl ist 234570, jene bezeichne man mit A, diese durch C, und die gegebene durch B;

2) Weil für alle fünfzifferichten Zahlen in diesen Tabellen die Logarithmen angegeben sind, so bestimme man nach §. 65. den Logarithmus von 234560 und den von 234570, man findet, daß Log. A = Log. 234560 = 5,3702540, und daß Log. C = Log. 234570 = 5,3702725;

3) Die Differenz dieser Logarithmen, somit 5,3702725 — 3702540 ist = 0,0000185, dann C — A = 10, und B — A = 8, um deßwillen erhält man die Proportion 10 : 8 = 0,0000185 : x, in welcher x = (0,0000185 × 8) : 10 = 0,0000148;

4) Die Zahl x oder die Differenz Log. B — Log. A = d addire man zum Logarithmus von A, man findet den Loganithmus von B, welcher = Log. A + d, und daher = 5,3702540 + 0,0000148 = 5,3702688, weßhalb der gesuchte Log. B = Log. 234568 = 5,3702688.

II. Auflösung:

Auf eine kürzere und einfachere Weise erhält man zur gegebenen Zahl B = 234568 den Logarithmus, wenn man nach der in Vega's Handbuche angegebenen Vorschrift den in der Tabelle in der letzten Spalte vorkommenden, zum letzten Ziffer 8 gehörigen Proportionaltheil 148 zum Logarithmus der kleineren Zahl A, und also zum Logarithmus 5,3702540 addirt.

Anmerkung: 1) Die in diesem §. bei Nro. 1. angeführte Proportion ist für Zahlen, die kleiner sind als 10000, nicht ganz richtig, weßhalb bei kleineren Tabellen der gesuchte Logarithmus in den letzten Dezimalstellen nicht mehr genau ist; für Zahlen aber über 10000, wenn ihre Differenzen nicht gar zu groß angenommen werden, darf dieselbe als richtig angenommen werden, was man leicht einsehen wird, wenn man die Differenzen einiger auf einander folgenden Logarithmen mit den Differenzen der dazu gehörigen Zahlen vergleicht.

2) Wird im briggischen logarithmischen Systeme der Logarithmus durch einen Dezimalbruch, der sieben Stellen enthält, ausgedrückt, so kann man für Zahlen von vielen Stellen, z. B. für eine Zahl von 12 bis 15 Ziffern den Logarithmus, und umgekehrt für einen Logarithmus, dessen Karakteristik eine größere Zahl ist, die entsprechende Zahl nicht mehr genau angeben.

Man bestimmt in solchen Fällen zu den ersten 8, oder gewöhnlich zu den ersten 7 gegebenen Ziffern den Logarithmus, und ergänzt die übrigen durch die Vergrößerung des Kennziffers, während man im Gegentheile beim gegebenen Logarithmus die ersten 7 Ziffern bestimmt und nach der Größe der Karakteristik die übrigen Stellen mit Nullen ausfüllt.

3) Hat man die Logarithmen von Vega bei Handen, so bestimme man bei größeren Zahlen auf die kürzere Weise nach der vorstehenden II. Auflösung den Logarithmus einer gegebenen ganzen Zahl, welche in Absicht auf ihre Zahlziffern größer ist als 101000.

§. 67.

IV. Aufgabe, für einen gemeinen Bruch den Logarithmus zu finden.

Auflösung:

1) Ist der gemeine Bruch ein unächter Bruch, bei welchem der Zähler größer ist als der Nenner, so subtrahire man vom Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners (§. 57. Zus.): ist aber der unächte Bruch ein solcher, bei welchem der Nenner gleich ist dem Zähler, so beträgt sein Werth ein Ganzes (II. §. 3. b.), und es ist dann schon zum voraus bekannt, daß sein Logarithmus als der Logarithmus von 1 gleich 0 ist (§. 55. Zus. II.);

2) Ist der Bruch ein ächter Bruch (II. §. 3. a.), so subtrahire man den Logarithmus des Zählers vom Logarithmus des Nenners, und setze dem Reste das Zeichen — vor;

3) Will man bei einem ächten Bruche den Logarithmus positiv erhalten, so addire man der Karakteristik des Logarithmus des Zählers so viele Einheiten, als nöthig sind, damit man den Logarithmus des Nenners nach der im Zusatze des §. 57. angegebenen Vorschrift abziehen kann, und setze diese addirte Einheiten am Ende zur rechten Seite mit dem Zeichen — dem Reste bei;

4) Ist der gegebene gemeine Bruch ein gemischter Bruch, so muß man ihn vorhin einrichten (II. §. 28.), damit man für ihn auf die hier angezeigte Weise den Logarithmus finden kann.

I. Beispiel:

Man suche den Logarithmus für den unächten Bruch $^9/_5$.

Auflösung:

Log. 9 = 0,9542425
Log. 5 = 0,6989700

mithin Log. $^9/_5$ = 0,2552725.

Es ist also 0,2552725 der gesuchte Logarithmus des unächten Bruches $^9/_5$.

II. Beispiel:

Man suche den Logarithmus für den ächten Bruch $^3/_4$.

I. Auflösung:

Log. 4 = 0,6020600,
Log. 3 = 0,4771213,

mithin Log. $^3/_4$ = Log. — $^4/_3$ = — 0,1249387.

Es ist also der negative Logarithmus 0,1249387 oder — 0,1249387 der verlangte Logarithmus von $^3/_4$.

II. Auflösung:

Log. 3 = 0,4771213
+ 1 — 1

daher Log. 3 = 1,4771213 — 1
ferner Log. 4 = 0,6020600

folglich Log. $^3/_4$ = 0,8750613 — 1.

Es ist also der positive Logarithmus 0,8750613 — 1 oder 0,8750613 — 1 der Logarithmus des ächten Bruches $^3/_4$.

III. Beispiel:

Man soll zum gemischten Bruche 9$^3/_4$ den Logarithmus finden.

Auflösung:

Man richte allererst den Bruch ein, und verwandle dadurch den Bruch 9$^3/_4$ in den Bruch $^{39}/_4$, zu

welchem der Logarithmus, wie beim I. Beispiele, auf nachstehende Weise gefunden wird:

$$\text{Log. } 39 = 1{,}5910646$$
$$\text{Log. } 4 = 0{,}6020600$$
$$\text{mithin} \quad \text{Log. } {}^{39}/_{4} = 0{,}9890046.$$

Es ist also, da $^{39}/_{4} = 9\,^{3}/_{4}$, der Logarithmus von $9\,^{3}/_{4} = 0{,}9890046$.

Anmerkung: 1) Sucht man für den ächten Bruch den positiven Logarithmus, wie es bei der II. Auflösung des II. Beispieles geschehen ist, so wird nach der vorgeschriebenen Verfahrungsweise ohne Veränderung des Werthes zum Logarithmus auf einer Seite eine Zahl addirt, und auf der anderen die nämliche Zahl subtrahirt, und dann von der Differenz zweier Zahlen dadurch eine dritte Zahl abgezogen, daß man sie vom Minuend subtrahirt (III. §. 46. Lehrs. III.).

2) Zu gemeinen Brüchen, sie mögen wie immer beschaffen sein, könnte man die Logarithmen auch dadurch finden, daß man dieselben in Dezimalbrüche verwandeln, und dann die Logarithmen nach den Regeln des nächsten §. bestimmen würde.

§. 68.

V. Aufgabe, den Logarithmus eines Dezimalbruches aus den Tabellen anzugeben.

Auflösung:

1) Man betrachte den Dezimalbruch wie eine ganze Zahl, und bestimme dafür auf die in den vorausgehenden §§. angezeigte Weise den Logarithmus;

2) Man ziehe am Ende so viele Einheiten ab, als der gegebene Bruch Dezimalstellen hat;

3) Ist der gegebene Dezimalbruch ein eigentlicher Bruch, so kann man für ihn den Logarithmus kürzer dadurch finden, daß man mit Weglassung aller links stehenden Nullen zu den Ziffern den Logarithmus aufsuchet, und dann an die Stelle des Kennziffers eine Null, rückwärts aber so viele Einheiten mit dem Zeichen — setzet, als der gegebene Dezimalbruch vorwärts Nullen hat.

I. Beispiel:

Man soll zu 34,576 den Logarithmus finden.

Auflösung:

1) Man betrachte alle Ziffern wie eine ganze Zahl, und suche zu 34576 den Logarithmus, welcher = 4,5387747;

2) Weil man hier drei Dezimalstellen hat, so subtrahire man von der Karakteristik 4 die Zahl 3, man erhält 1,5387747 als den gesuchten Logarithmus, d. h., Log. 34,576 = 4,5387747 — 3 = 1,5387747.

II. Beispiel:

Man suche zum Dezimalbruche 0,00036 den entsprechenden Logarithmus.

I. Auflösung:

Man bestimme mit Weglassung der Nullen den Logarithmus zu 36, welcher = 1,5563025, und subtrahire wegen der vorkommenden fünf Dezimalstellen die Zahl 5, man findet, daß Log. 0,00036 = 1,5563025 — 5 = 0,5563025 — 4.

II. Auflösung:

Man bestimme den Logarithmus von 36, gebe diesem die Null als Karakteristik, und setze rechts wegen der vier links stehenden Nullen die Zahl — 4 dem Logarithmus bei, es ist jetzt wieder Log. 0,00036 = 0,5563025 — 4.

Anmerkung: 1) Die Logarithmen lassen sich dadurch, daß man, im Falle sie als Differenzen erscheinen, vom Minuend und Subtrahend die nämliche Zahl abzieht, oder die Karakteristik um eine beliebige Zahl vermehrt, die rechts wieder abgezogen wird, auf verschiedene Arten ausdrücken; so ist z. B. Log. 0,00036 = 1,5563025 — 5 = 0,5563025 — 4 = 3,5563025 — 7.

2) Ist der Logarithmus für eine Wurzelgröße zu bestimmen (§. 59.), und der Logarithmus der Urgröße in der Gestalt einer Differenz ausgedrückt, so muß man diesen letzteren so umändern, daß der Subtrahend durch den Exponenten des Wurzelzeichens ohne Rest theilbar ist, damit man mit diesem Exponenten die Division wirklich verrichten kann.

Wäre z. B. der Logarithmus zu $\sqrt[3]{5/144}$ zu finden,

so müßte man Log. $^5/_{144}$ = 0,5406075 — 2 in den Logarithmus 1,5406075 — 3 verändern, wodurch man erhält, daß Log. $\sqrt[3]{^5/_{144}}$ = (1,5406075 — 3) : 3 = 0,5135258 — 1, indem der bei der Division des Minuends bleibende Rest, da schon 7 Dezimalstellen vorhanden sind, als unbedeutend vernachläßiget werden darf.

Ist hingegen der Logarithmus zu $\sqrt[7]{^5/_{144}}$ zu finden, so muß man Log. $^5/_{144}$ = 0,5406075 — 2 in den Logarithmus 5,5406075 — 7 verwandeln, wodurch man erhält, daß Log. $\sqrt[7]{^5/_{144}}$ = 0,7915153 — 1.

3) Bei ächten Brüchen, sie mögen gemeine oder Dezimalbrüche sein, ist es vortheilhafter, wenn man bei den durch die Logarithmen auszuführenden Berechnungen den positiven Logarithmus in der Gestalt einer Differenz bestimmt; um deßwillen werden auch gewöhnlich die Logarithmen der ächten Brüche auf diese Weise ausgedrückt.

§. 69.

VI. Aufgabe, zu einem gegebenen positiven Logarithmus die entsprechende Zahl aus den Tabellen anzugeben.

Auflösung:

1) Man schlage die logarithmischen Tabellen nach jener Anweisung auf, die ihnen gewöhnlich beigefügt ist, im Falle ihre Einrichtung nicht schon zum voraus bekannt ist, und suche in jenen Spalten, welche die Aufschrift „Logarithmus oder Log." haben, den gegebenen Logarithmus;

2) Kömmt er in einer Spalte genau vor, so nehme man die dabei stehende entsprechende Zahl, welche die gesuchte Zahl ist, wenn die Mantisse sammt dem Kennziffer vorkömmt: ist das Kennziffer in der Tabelle dem Logarithmus nicht beigefügt, oder kleiner, als das des gegebenen Logarithmus, so bestimme man nach dem IV. Zusatze des §. 61. aus der Größe des Kennziffers die in der gesuchten Zahl vorkommenden ganzen Ziffern;

3) Kömmt die Mantisse des gegebenen Logarith-

mus in den Tabellen nicht genau vor, so nehme man, im Falle es in Absicht auf die vorliegende Aufgabe ohne merklichen Fehler geschehen kann, vom nächst kleineren oder nächst größeren Logarithmus der Tabelle die entsprechende Zahl: ist diese aber genauer zu bestimmen, so verfahre man nach der im nächsten §. vorkommenden Vorschrift;

4) Enthält die gefundene Zahl um ein Ziffer mehr, als das Kennziffer des Logarithmus Einheiten hat, so ist sie die verlangte Zahl; enthält sie mehrere Ziffern, so schneidet man den Ueberschuß als den Zähler eines Dezimalbruches ab, und besteht sie aus wenigeren Ziffern, so ergänzt man zur rechten Seite die fehlenden Ziffern durch Nullen.

I. Beispiel:

Man soll zu 2,4533183 die entsprechende Zahl finden.

Auflösung:

1) Man schlage in der Tabelle in der mit Log. bezeichneten Spalte den gegebenen Logarithmus auf, man findet ihn genau, und dabei die entsprechende Zahl 284;

2) Weil der Logarithmus die Zahl 2 zum Kennziffer hat, so besteht die gesuchte Zahl aus 3 ganzen Ziffern (§. 61. Zus. IV.), und deßhalb ist 2,4533183 = Log. 284, d. h., 284 ist die diesem Logarithmus entsprechende Zahl.

II. Beispiel:

Man soll zum Logarithmus 8,5976952 die entsprechende Zahl finden.

Auflösung:

1) Sucht man diesen Logarithmus in der Tabelle bei den Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 1000, so findet man ihn genau, und dabei die ganze Zahl 396;

2) Weil das Kennziffer = 8 ist, so bekömmt die gesuchte Zahl neun Ziffern; um deßwillen muß man zur Rechten die fehlenden sechs Ziffern mit Nullen ergänzen, und 8,5976952 = Log. 396000000.

III. Beispiel:

Man soll zu 0,6893089 die entsprechende Zahl finden.

Auflösung:

1) Sucht man diesen Logarithmus bei den mit dem Kennziffer 2 vorkommenden Logarithmen, so findet man, weil derselbe in der Tabelle ganz anzutreffen ist, die Zahl 489;

2) Weil der Logarithmus die Null zum Kennziffer hat, so bekömmt die ganze Zahl nur ein Ziffer, die übrigen Ziffern zur rechten Seite bilden den Dezimalbruch, daher ist 0,6893089 = Log. 4,89.

IV. Beispiel:

Man soll zum Logarithmus 2,6954821 die entspresprechende Zahl finden.

Auflösung:

Man findet in der Tabelle bei den Zahlen zwischen 1 und 1000 den Logarithmus 2,6954817, welchem dieZahl 496 entspricht; wird nun keine besondere Genauigkeit erfodert, so nimmt man an, 2,6954821 sei der Logarithmus von 496, oder 2,6954821 = Log. 496.

Anmerkung: In Absicht auf die Auflösung des II. Beispieles ist der Grund des Verfahrens aus dem ersichtlich, was im §. 65. gesagt worden ist.

§. 70.

VII. Aufgabe, zu einem gegebenen positiven Logarithmus die entsprechende Zahl zu finden, wenn derselbe in den Tabellen nicht genau vorkömmt.

Auflösung:

1) Nach §. 66. Nro. 1. findet zwischen großen Zahlen, die nicht viel von einander unterschieden sind, nachstehende Proportion statt:

$C - A : B - A = \text{Log. } C - \text{Log. } A : \text{Log. } B - \text{Log. } A;$

2) Man setze das zweite Glied dieser Proportion, somit die Differenz B — A = d, und man findet durch das Transponiren (III. §. 96. Zus. 1.), daß B = A + d; d. h., man erhält die mittlere Zahl B, wenn man den gefundenen Unterschied d zur kleineren Zahl A addirt;

3) Man bestimme aus der Tabelle zum nächst größeren Logarithmus die Zahl C, und zum nächst kleineren die Zahl A, und nehme sowohl die Differenz dieser beiden Zahlen, als auch die Differenz zwischen dem gegebenen Logarithmus der Zahl B und dem Logarithmus von A, und jene zwischen den Logarithmen der Zahlen A und C, welche mit Vorsetzung des gehörigen Kennziffers aus der Tabelle als die Grenzzahlen bekannt sind, zwischen welchen der Logarithmus der Zahl B liegt;

4) Man suche zu diesen drei Differenzen nach der bei Nro. 1. angeführten Proportion die Differenz B — A, welche, zur kleineren Zahl addirt (Nro. 2.), die entsprechende Zahl des gegebenen Logarithmus gibt.

Beispiel:

Es sei zum Logarithmus 5,3702688 nach dem angeführten Handbuche von Vega die entsprechende Zahl B zu finden (§. 66. Beisp.).

I. Auflösung:

1) Dem nächst kleineren Logarithmus, welcher in der Tabelle ist, entspricht bei dem in diesem Beispiele vorkommenden Kennziffer 5 die Zahl 234560, und dem nächst größeren die Zahl 234570, d. h., 5,3702540 = Log. 234560 = Log. A, und 5,3702725 = Log. 234570 = Log. C;

2) Zwischen A und C ist die Differenz = 10, und zwischen ihren Logarithmen ist sie = 0,0000185, während die Differenz der Logarithmen der Zahlen B und A der Zahl 0,0000148 gleich ist;

3) Man suche nach der erwähnten Proportion die Differenz B — A, nämlich

$$10 : B - A = 0{,}0000185 : 0{,}0000148, \text{ oder}$$
$$10 : B - A = 185 : 148 \text{ (§. 34. Zus. I.)},$$
$$\text{weßhalb } B - A = \frac{148 \times 10}{185} = {}^{1480}/_{185} = 8.$$

Es ist also 8 das letzte Ziffer der gesuchten Zahl B, daher diese $= A + d = 234560 + 8 = 234568$, und $5{,}3702688 = \text{Log. } 234568 = \text{Log. } B$.

II. Auflösung:

Viel einfacher und bequemer erhält man zum gegebenen Logarithmus 5,3702688 die entsprechende Zahl 234568, wenn man nach der in Vega's Handbuche vorgeschriebenen Verfahrungsweise zu den ersten fünf Ziffern der gesuchten Zahl das sechste Ziffer 8 bestimmt.

Anmerkung: 1) Hat man keine so bequem eingerichtete Tabellen, wie die von Vega sind, so verfahre man, um zu Logarithmen, die in der Tabelle nicht mehr genau sind, die entsprechenden Zahlen zu finden, nach der bei diesem Beispiele vorgeschriebenen I. Auflösung, gleichwie man dann nach Vorschrift des §. 66. ebenfalls die im angeführten Beispiele vorkommende I. Auflösung wählet, wenn man zu größeren Zahlen, als die Tabelle enthält, die Logarithmen sucht.

2) Die mit Rücksicht auf das Handbuch von Vega angeführte II. Auflösung berührte ich nur kurz, weil hierüber in diesem Werke die ausführliche Anleitung vorkömmt.

§. 71.

VIII. Aufgabe, zu einem negativen Logarithmus die entsprechende Zahl zu suchen.

Auflösung:

1) Man betrachte den gegebenen Logarithmus wie einen positiven Logarithmus, und suche dazu die entsprechende Zahl;

2) Man setze einen Bruch, dessen Nenner diese gefundene Zahl, und dessen Zähler die Zahl 1 ist, so ist dieser Bruch die gesuchte Zahl.

Beispiel:

Man soll zum Logarithmus — 0,9542425 die entsprechende Zahl finden.

Auflösung:

Sucht man zum positiven Logarithmus 0,9542425 die entsprechende Zahl, so findet man 9; um deßwillen ist 1/9 die gesuchte Zahl, oder 0,9542425 = Log 1/9.

Der Grund des Verfahrens ist aus §. 57. ersichtlich; man kann nämlich den Logarithmus — 0,9542425 als die Differenz 0,0000000 — 0,9542425 betrachten (III. §. 50. Zus. II.), welche = Log. 1 — Log. 9 = Log. (1 : 9) = Log. 1/9.

§. 72.

IX. Aufgabe, zu einem positiven Logarithmus die entsprechende Zahl zu finden, wenn von ihm am Ende einige Einheiten subtrahirt werden sollen.

Auflösung:

1) Man nehme auf die abzuziehenden Einheiten keine Rücksicht, und suche zum Logarithmus, in so ferne er den Minuend bildet, die entsprechende Zahl;

2) Man rücke in dieser Zahl das Komma (,) um so viele Stellen zur Rechten, als Einheiten subtrahirt werden sollen.

I. Beispiel:

Man suche zum Logarithmus 0,8750613 — 1 die entsprechende Zahl.

Auflösung:

Dem Logarithmus 0,8750613 entspricht die Zahl 7,5, wo das Komma noch um eine Stelle zur Rechten gerückt wird; man erhält dadurch die Zahl 0,75, weßhalb 0,8750613 — 1 = Log. 0,75 = Log. 3/4.

II. Beispiel:

Man suche zum Logarithmus 0,6366884 — 3 die entsprechende Zahl.

Auflösung:

Dem Logarithmus 0,6366884 entspricht die Zahl 4,332, rückt man nun das Komma wegen des Subtrahends 3 um drei Stellen von der rechten zur linken

Seite, so erhält man die Zahl 0,004332, weßhalb 0,6366884 — 3 = Log. 0,004332.

§. 73.

X. Aufgabe, die dekadische Ergänzung eines Logarithmus anzugeben.

Auflösung:

Man schlage in den Tabellen den Logarithmus der gegebenen Zahl auf, und ziehe alle Ziffern dieses Logarithmus von 9, das niedrigste, zur rechten Seite stehende aber von 10 ab, so ist der gefundene Rest die verlangte dekadische Ergänzung (III. §. 51. a. und §. 52. A.).

Beispiel:

Man soll vom Log. 8 die dekadische Ergänzung angeben.

Auflösung:

Man suche in der Tabelle den Logarithmus der Zahl 8, welcher = 0,9030900, und subtrahire diesen auf die angezeigte Weise, man findet als die gesuchte Differenz den Logarithmus 9,0969100; um deßwillen ist 9,0969100 die verlangte dekadische Ergänzung des Logarithmus der Zahl 8, d. h., die dekadische Ergänzung des Log. 8 ist = 9,0969100, oder compl. dec. log. 8 = 9,0969100.

Anmerkung: Weil gewöhnlich den logarithmischen Tabellen, die bei der Auflösung der vorstehenden Aufgaben zu benützen sind, über ihren Gebrauch ausführliche Anleitungen beigefügt sind, so habe ich in diesem Abschnitte nur kurz gezeigt, wie zu gegebenen Zahlen die Logarithmen, und zu diesen die entsprechenden Zahlen gefunden werden können.

IV. Ab-

IV. Abschnitt.

Anwendung der briggischen Logarithmen auf die Rechnungen mit Ziffern.

§. 74.

I. Aufgabe, einen gegebenen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln.

Auflösung:

1) Man bestimme für den gemeinen Bruch den Logarithmus positiv, indem man, im Falle ein ächter Bruch gegeben ist, dem Kennziffer des Logarithmus des Zählers so viele Einheiten addirt, als man nöthig hat, um den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers subtrahiren zu können, und bemerke im Reste am Ende mit dem Zeichen — die addirten Einheiten;

2) Hierauf bestimme man zum positiven Theil des Restes die entsprechende Zahl, und setze das Komma von der Rechten zur Linken nach so vielen Ziffern, als der negative Theil der Differenz Einheiten enthält (§. 72.);

3) Ist die gefundene Zahl selbst schon ein Dezimalbruch, so rücke man das Komma wieder um eben so viele Ziffern zur Linken.

I. Beispiel:

Man soll den gemeinen Bruch $^3/_4$ in einen Dezimalbruch verwandeln.

Auflösung:

1) Bestimmt man nach der im II. Beispiele des §. 67. angegebenen II. Auflösung den positiven Logarithmus dieses ächten Bruches, so erhält man, daß Log. $^3/_4$ = 0,8750613 — 1;

2) Dem Logarithmus 0,8750613 entspricht die Zahl 7,5; es ist also, da am Ende eine Einheit sub-

trahirt werden soll, und deßhalb das Komma um eine Stelle weiter links zu rücken ist, der gemeine Bruch $^3/_4$ gleich dem Dezimalbruche 0,75.

II. Beispiel:

Man soll den unächten Bruch $^{19}/_3$ in einen Dezimalbruch verändern.

Auflösung:

1) Man bestimme nach der Vorschrift des §. 67. den Logarithmus zum Bruche $^{19}/_3$, derselbe ist = 0,8016323;

2) Zu diesem Logarithmus suche man die entsprechende Zahl, man findet 6,3333...; daher ist der gemeine Bruch $^{19}/_3$ dem Dezimalbruche 6,3333... gleich.

Anmerkung: 1) Der Grund in Absicht auf das hier vorgeschriebene Verfahren leuchtet daher ein, daß man den positiven Logarithmus, von dem einige Einheiten subtrahirt werden sollen, und der somit in der Gestalt einer Differenz erscheint, als den Logarithmus eines Bruches, und also den Minuend als den Logarithmus des Zählers, und den Subtrahend als den des Nenners betrachten kann (§. 57. Zus.); um deßwillen ist z. B. Log. $^3/_4$ $= 0{,}8750613 - 1 = \text{Log. } 7{,}5 - \text{Log. } 10 = \text{Log. } \frac{7{,}5}{10}$ = Log. 0,75, mithin $^3/_4 = 0{,}75$.

2) Will man nicht absichtlich mit Logarithmen rechnen, so kann man, zumal bei kleineren Zahlen, nach den im III. Thl. §. 7. aufgestellten Regeln öfters durch die vorgenommene Division die gemeinen Brüche geschwinder in Dezimalbrüche verwandeln.

§. 75.

II. Aufgabe, gegebene Zahlen mit einander zu multipliziren.

Auflösung:

1) Man schlage nach den im vorigen Abschnitte aufgestellten Regeln die Logarithmen der Faktoren auf, und schreibe sie nach den bei der Addition der Dezimalbrüche aufgestellten Regeln unter einander (III. §. 11.);

2) Man addire diese Logarithmen, und suche zur Summe die entsprechende Zahl, welche das verlangte Produkt der gegebenen Zahlen ist (§. 56.).

Beispiel:

Man multiplizire auf diese Weise 428 mit 36.

Auflösung:

Log. 428 = 2,6314438
Log. 36 = 1,5563025

mithin Log. (428 × 36) = 4,1877463.

Zum Logarithmus 4,1877463 gehört die Zahl 15408, welche das verlangte Produkt ist; d. h., 428 × 36 = 15408.

§. 76.

III. Aufgabe, gegebene Zahlen mit einander zu dividiren.

Auflösung:

1) Man schlage den Logarithmus des Dividends und den des Divisors auf, und schreibe diesen nach dem Range der Einheiten unter jenen;

2) Man subtrahire den Logarithmus des Divisors von dem des Dividends, und suche zum Reste die entsprechende Zahl, welche der verlangte Quotient ist (§. 57.).

Beispiel:

Man soll 1512 mit 36 dividiren.

Auflösung:

Log. 1512 = 3,1795518
Log. 36 = 1,5563025

mithin Log. $^{1512}/_{36}$ = 1,6232493.

Dem Logarithmus 1,6232493 entspricht die Zahl 42, welche der verlangte Quotient ist; d. h., 1512 : 36 = 42.

§. 77.

IV. Aufgabe, zu drei gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl zu finden.

I. Auflösung:

1) Man addire die Logarithmen der beiden mittleren Glieder, und ziehe von ihrer Summe den Logarithmus des ersten Gliedes ab;

2) Zu dem als Rest zum Vorscheine kommenden Logarithmus suche mau die entsprechende Zahl, welche die gesuchte vierte geometrische Proportionalzahl ist (§. 36.).

II. Auflösung:

Man addire die Logarithmen der beiden mittleren Glieder, und die dekadische Ergänzung des ersten Gliedes;

2) Vom Kennziffer der erhaltenen Summe ziehe man 10 als die nächst höhere Einheit ab, so gibt die dem Reste entsprechende Zahl die vierte geometrische Proportionalzahl (III. §. 52. B.).

Beispiel:

Man suche zu den Zahlen 24, dann 48 und 36 die vierte geometrische Proportionalzahl, welche durch x ausgedrückt wird.

I. Auflösung:

	Log. 48	= 1,6812412
	Log. 36	= 1,5563025
also	Log. 48 † Log. 36	= 3,2375437
ferner	Log. 24	= 1,3802112
folglich	Log. x	= 1,8573325.

Dem Logarithmus 1,8573325 entspricht die Zahl 72, welche die gesuchte vierte geometrische Proportionalzahl ist; d. h., 24 : 48 = 36 : 72.

II. Auflösung:

	Log. 48	=	1,6812412
	Log. 36	=	1,5563025
Compl. dec.	log. 24	=	8,6197888
weßhalb die Summe		=	11,8573325.

Zieht man von der Summe dieser Logarithmen die Zahl 10 ab, so erhält man den Logarithmus 1,8573325, welchem die Zahl 72 als die gesuchte vierte geometrische Proportionalzahl entspricht.

Bezeichnet man die Summe der beiden Logarithmen von 48 und 36 mit A, den Logarithmus von 24 mit N, so ist die Zahl 10 die höhere Einheit oder U, und 8,6197888 die dekadische Ergänzung C von N.

Nun ist nach der I. Auflösung Log. x = Log. A — Log. N, und nach der im III. Thl. §. 52. B. aufgestellten Regel A — N = A + C — U, daher Log. x = A + C — U, woraus der Grund der Verfahrungsweise in Absicht auf die dekadische Ergänzung ersichtlich ist.

Anmerkung: Die dekadische Ergänzung gewährt eine Abkürzung im Rechnen, wenn man von der Summe mehrerer Logarithmen einen oder mehrere Logarithmen subtrahiren soll.

§. 78.

V. Aufgabe, eine gegebene Zahl zu einer verlangten Würde zu erheben.

Auflösung:

1) Man multiplizire den Logarithmus der gegebenen Zahl mit dem Exponenten der verlangten Würde;

2) Zum Produkte suche man die entsprechende Zahl, welche die gesuchte Potenz der gegebenen Zahl ist (§. 58.).

Beispiel:

Man soll die Zahl 12 zum Kubus erheben.

Auflösung:

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 12 = & 1{,}0791812 \\ 3 = & 3 \\ \hline \end{array}$$

mithin Log. 12^3 = Log. $12 \times 3 = 3{,}2375436$.

Dem Logarithmus 3,2375436 entspricht die Zahl 1728, um deßwillen ist $12^3 = 1728$.

§. 79.

VI. Aufgabe, aus einer gegebenen Zahl eine verlangte Wurzel auszuziehen.

Auflösung:

Man dividire den Logarithmus der gegebenen Zahl mit dem Exponenten der verlangten Wurzel, die dem Quotienten entsprechende Zahl ist die gesuchte Wurzel (§. 59.).

Beispiel:

Man soll aus 157464 die Kubikwurzel ausziehen (§. 12. Beisp. I.).

Auflösung:

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 157464 = & 5{,}1971812 \\ 3 = & 3 \\ \hline \end{array}$$

also Log. $\sqrt[3]{157464}$ = Log. $157464 : 3 = 1{,}7323937$.

Dem Logarithmus 1,7323937 entspricht die Zahl 54; um deßwillen ist $\sqrt[3]{157464} = 54$.

Auf eine ähnliche Weise findet man z. B., daß $\sqrt[8]{6561} = 3$, weil Log. $\sqrt[8]{6561}$ = Log. $6561 : 8 = 3{,}8169700 : 8 = 0{,}4771213$, und $0{,}4771213$ = Log. 3.

§. 80.

VII. Aufgabe, eine Gleichung, wo die unbekannte Größe als Exponent der Potenz oder der Wurzel vorkömmt, aufzulösen.

Auflösung:

1) Man verändere nach den im III. Thl. §. 98.

aufgestellten Regeln die gegebene Gleichung so, daß die Größe, welche die unbekannte Größe als Exponenten der Würde oder Wurzel bei sich hat, allein und positiv auf einer Seite steht;

2) Man setze für beide Seiten die Logarithmen der Größen, welche im nämlichen Systeme bei gleichen Zahlen gleich sind (§. 55. Zus. III);

3) In der erhaltenen neuen Gleichung kömmt die unbekannte Größe nicht mehr als Exponent, sondern als Faktor eines Produktes (§. 58.), oder als Nenner eines Bruches vor (§. 59.); um deßwillen kann jetzt dieselbe nach dem bei Nro. 1. zitirten §. gefunden, und dadurch die gegebene Gleichung aufgelöset werden.

I. Beispiel:

Zu welcher Würde muß die Zahl 2 erhoben werden, um das Produkt 65536 zu erhalten.

Auflösung:

1) Wird der Exponent der verlangten Würde durch x ausgedrückt, so erhält man die Gleichung $2^x = 65536$;

2) Weil gleichen Zahlen gleiche Logarithmen entsprechen, so ist Log. $2 \times x =$ Log. 65536, weßhalb $x =$ Log. 65536 : Log. $2 = 4,8164799 : 0,3010300$, und also, weil im Dividend und Divisor gleich viel Dezimalen vorkommen (III. §. 17.), $x = 48164799 : 3010300 = 15,99 \ldots$ beinahe $= 16$; d. h., die Zahl 2 muß zur 16ten Würde erhoben werden, um 65536 zu erhalten, oder $2^{16} = 65536$.

II. Beispiel:

Welche Wurzel muß man aus 119716 ausziehen, um 346 zu erhalten.

Auflösung:

1) Bezeichnet man den Exponenten der Wurzel mit x, so bekömmt man die Gleichung $\sqrt[x]{119716} = 346$;

2) Weil bei gleichen Zahlen die Logarithmen gleich sind, so ist Log. 119716 : x = Log. 346, und also Log. 119716 = Log. 346 × x, weßhalb x = Log. 119716 : Log. 346 = 2,00... beinahe = 2, es muß demnach aus 119716 die Quadratwurzel ausgezogen werden, um 346 zu erhalten, d. h., $\sqrt{119716} = 346$.

III. Beispiel:

Die Gleichung $\sqrt[x]{729} = 9$ aufzulösen.

Auflösung:

$$\frac{\text{Log. } 729}{x} = \text{Log. } 9,$$

also

$$\text{Log. } 729 = \text{Log. } 9 \times x,$$

und

$$x = \frac{\text{Log. } 729}{\text{Log. } 9} = \frac{2{,}8627275}{0{,}9542425} = 3.$$

Es muß also aus 729 die Kubikwurzel ausgezogen werden, um 9 zu erhalten, oder $\sqrt[3]{729} = 9$.

Anmerkung: Werden Logarithmen mit Logarithmen dividirt, so vernachläßiget man zuletzt den bleibenden unbedeutenden Rest, welcher öfters von den Logarithmen selbst herkömmt, indem sie durch Annäherung bestimmt sind, wie dieses bei der Auflösung des I. und II. Beispieles der Fall war (§. 61. Zus. IV.).

§. 81.

Benützung der Logarithmen zur Auflösung einiger bei den geometrischen Progressionen vorkommenden Aufgaben.

I.

Wie groß ist die Anzahl der Glieder einer geometrischen Reihe, bei welcher das erste Glied a = 2, der gemeinschaftliche Exponent m ebenfalls = 2, und das letzte Glied u = 64 ist.

I. Auflösung:

1) Weil hier die Stücke a, u und m gegeben sind, und n gesucht wird, so ist die im II. Zusatze des §. 45. vorkommende Formel zu benützen, nach welcher $u = am^{n-1}$;

2) Da ferner die unbekannte Größe n als Exponent einer Würde vorkömmt, so bestimme man sie nach dem vorigen §.; man findet, daß $\frac{u}{a} = m^{n-1}$, dann Log. u — Log. a = Log. m × (n — 1), somit (Log. u — Log. a) : Log. m = n — 1, und also $n = 1 + \frac{\text{Log. } u - \text{Log. } a}{\text{Log. } m}$.

3) Man schlage zu u, a und m die entsprechenden Logarithmen auf, und nehme die durch die Zeichen angezeigten Rechnungsarten vor, um die Größe n zu finden, welche 1 + 5 = 6 ist.

Es ist also 6 die gesuchte Anzahl der Glieder dieser Reihe.

II. Auflösung:

Man nehme aus der Tabelle des §. 48. die 9te Formel, wo die Größe n schon bestimmt ist, man wird finden, daß $n = 1 + \frac{\text{Log. } u - \text{Log. } a}{\text{Log. } m}$, und also hier $= 1 + \frac{\text{Log. } 64 - \text{Log. } 2}{\text{Log. } 2} = 1 + (1{,}8061800 - 0{,}3010300) : 0{,}3010300 = 1 + 1{,}5051500 : 0{,}3010300 = 1 + 5 = 6$; d. h., die Zahl 6 ist die gesuchte Anzahl der Glieder dieser Reihe.

II.

Wie groß ist das letzte Glied u einer geometrischen Reihe, wo die Summe S = 254, der Exponent m = 2, und die Anzahl der Glieder n = 7 ist.

Auflösung:

1) Weil hier die Stücke S, m und n gegeben sind, so benütze man, um u zu finden, aus der Tabelle

des §. 48. die 19te Formel, nach welcher $u = \frac{S(m-1)m^{n-1}}{m^n - 1}$, und somit $= \frac{254(2-1)2^{7-1}}{2^7 - 1}$ $= \frac{254 \cdot 2^6}{2^7 - 1}$.

2) Rechnet man mit Logarithmen, so erhält man 128, nämlich

$$
\begin{array}{lr}
 & \text{Log. } 254 = 2{,}4048337 \\
 & \text{Log. } 2^6 = 1{,}8061800 \\
\hline
\text{also} & \text{Log. } (254 \cdot 2^6) = 4{,}2110137 \\
\text{ferner} & \text{Log. } 2^7 - 1 = 2{,}1038037 \\
\hline
\text{somit} & \text{Log. } u = 2{,}1072100;
\end{array}
$$

3) Dem Logarithmus 2,1072100 entspricht die Zahl 128, es ist also u = 128, d. h., die Zahl 128 ist das gesuchte letzte Glied dieser Reihe.

4) Mittels der dekadischen Ergänzung würde die Rechnung so ausgeführt werden:

$$
\begin{array}{r}
\text{Log. } 254 = 2{,}4048337 \\
\text{Log. } 2^6 = 1{,}8061800 \\
\text{Compl. dec. log. } 2^7 - 1 = 7{,}8961963 \\
\hline
\end{array}
$$

daher Log. u = 12,1072100 − 10 = 2,1072100.

Man findet auf diese Weise wieder, daß u = 128, indem 2,1072100 = Log. 128.

III.

Man suche die Summe einer geometrischen Reihe, wo das erste Glied a = 1, das letzte u = 15625, und die Anzahl der Glieder n = 7 ist.

Auflösung:

1) Weil hier die Stücke a, u und n gegeben sind, so benütze man aus der Tabelle des §. 48. die 16te Formel, nach dieser ist

$$S = \frac{u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}} = \frac{15625\sqrt[6]{15625} - 1\sqrt[6]{1}}{\sqrt[6]{15625} - \sqrt[6]{1}};$$

2) Die Wurzelgröße $\sqrt[6]{15625}$ ist = 5; und $\sqrt[6]{1} = 1$, weil Log. $\sqrt[6]{15625}$ = Log. 15625 : 6 = 4,1938200 : 6 = 0,6989700 = Log. 5, und jede Wurzel von 1 wieder 1 ist;

3) Daher ist $S = \frac{15625 \times 5 - 1}{5 - 1} = {}^{78124}/_{4}$ = 19531.

Es ist also die Zahl 19531 die verlangte Summe dieser Reihe.

Anmerkung: 1) Durch die I. Auflösung des I. Beispieles dieses §. ist die im §. 48. bei A. Nro. 4. vorkommende 9te Formel entwickelt worden; wie die übrigen Formeln der im §. 48. angeführten Tabelle, bei welchen ebenfalls Logarithmen vorkommen, gefunden werden, ist aus diesem §. selbst ersichtlich.

2) Wie die Logarithmen, um sich ihren Gebrauch durch die Uebung geläufig zu machen, zur Auflösung der Aufgaben der zusammengesetzten Zinsrechnung zu benützen sind, wird in diesem Werke bei der Anwendung der Progressionslehre gezeigt werden.

3) Ueber den Gebrauch der briggischen Logarithmen bei den trigonometrischen Berechnungen kann hier nichts gesagt werden, weil dieser Gegenstand in den Lehrbüchern der Geometrie vorgetragen wird, und das Studium der Trigonometrie voraussetzt.

V. Hauptstück.

Von dem binomischen Lehrsatze, wie auch von den Permutationen und Kombinationen.

I. Abschnitt.

Von dem binomischen Lehrsatze.

§. 82.

Erklärung.

a) Unter dem binomischen Lehrsatze versteht man jenen Lehrsatz, welcher die Gesetze angibt, nach welchen jede zweitheilige Größe zu jeder beliebigen Würde erhoben werden kann.

b) Derselbe wird binomischer Lehrsatz (Theorema binomiale) genannt, weil er die Gesetze angibt, nach welchen jede zweitheilige, oder zweigliederigte Größe (Quantitas binomia, vel binomium) auf jede beliebige Weise potenzirt werden kann.

Er heißt aber auch Newtonianischer Lehrsatz, oder das Newtonianische Binomium (Theorema Newtonianum), weil man gewöhnlich Newton als den Erfinder desselben angibt.

I. Zusatz: Alle mehrtheiligen Größen können als zweigliederigte Größen betrachtet werden (III. §. 85.), weil man immer alle Glieder mit Ausnahme des letzten als das erste, und das letzte als das zweite Glied eines Binomiums annehmen kann; um deßwillen gibt der binomische Lehrsatz die Gesetze für die Potenzen aller mehrtheiligen Größen an.

II. Zusatz: Unter einer jeden beliebigen Würde versteht man auch die Potenzen mit gebrochenen Expo-

nenten, auf welche Wurzelgrößen bei der Ausziehung der Wurzeln gebracht werden (III. §. 78. Zus. II.); daher kann der binomische Lehrsatz auch derjenige genannt werden, der die Gesetze angibt, nach welchen jede mehrtheilige Größe (Zus. I.) zu jeder beliebigen Würde erhoben, und somit auch aus einer solchen Größe jede beliebige Wurzel ausgezogen werden kann.

§. 83.

Die allgemeinen Gesetze des binomischen Lehrsatzes.

Nach folgenden Gesetzen erhält man jede Potenz einer zweitheiligen Größe, welche allgemein durch $a + b$ ausgedrückt werden kann:

1) Wenn der Exponent, den man mit m bezeichnen kann, eine ganze positive Zahl ist, so ist die Reihe endlich, und enthält $m + 1$ Glieder, d. h., um ein Glied mehr, als der Exponent Einheiten hat: ist aber der Exponent keine ganze positive Zahl, und somit ein Bruch, oder eine negative Größe, so ist die Reihe, welche die Potenz der zweitheiligen Größe angibt, unendlich (III. §. 91. Anmerk. 2.);

2) Jedes Glied der Reihe ist ein Produkt aus drei Faktoren, nämlich aus einem Koeffizienten, dann aus einer Potenz von a, und einer Potenz von b;

3) Der Exponent von a, welcher im ersten Gliede allemal der Exponent der verlangten Würde selbst ist, nimmt in jedem folgenden Gliede um 1 ab, bis er im letzten Gliede, wenn die Reihe endlich ist, Null wird; derselbe ist deßhalb in den folgenden Gliedern immer der Exponent des ersten Gliedes, von dem aber so viele Einheiten subtrahirt werden müssen, als Glieder vorausgehen;

4) Der Exponent des zweiten Theiles b ist im ersten Gliede $= 0$, und wächst in jedem folgenden immer um 1, so daß er allemal so viele Einheiten in sich enthält, als Glieder vorausgehen, und deßhalb bei einer endlichen Reihe im letzten Gliede dem Exponenten der Würde gleich wird;

5) Der Koeffizient der ersten Gliedes ist allemal $= 1$, in allen folgenden Gliedern aber ein Bruch,

dessen Zähler ein Produkt aller Exponenten ist, welche a in den vorausgehenden Glieder hat, und dessen Nenner ebenfalls ein Produkt so vieler, von 1 angefangen, in natürlicher Ordnung fortlaufenden Zahlen ist, als Glieder vorausgehen.

§. 84.

Bezeichnung dieser Gesetze durch Formeln.

Weil sich Irrationalzahlen durch Annäherung auf Rationalzahlen reduziren lassen, wie man dieses zum Theile bei der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln durch Annäherung gesehen hat (III. §. 30. u. 37.), so gibt es noch für alle möglichen Potenzen mehrtheiliger Größen vier verschiedene Fälle; es kann nämlich der Exponent der Würde eine ganze oder gebrochene, dann eine positive oder negative Zahl sein, und allgemein durch m und $\frac{m}{n}$, dann durch $-$ m und $-\frac{m}{n}$ ausgedrückt werden.

a) Ist der Exponent der Würde eine positive ganze Zahl, und somit a + b zur mten Würde zu erheben, so werden die aufgestellten Gesetze auf folgende Weise bezeichnet:

1) Der Exponent des ersten Theiles a ist im ersten Gliede = m, im zweiten = m $-$ 1, im dritten = m $-$ 2, im vierten = m $-$ 3 ꝛc., dann, da n jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann, im nten oder allgemeinen Gliede = m $-$ (n $-$ 1), und in dem diesem unmittelbar vorausgehenden Gliede = m $-$ (n $-$ 2), da dem nten Gliede n $-$ 1, und dem n $-$ 1ten Gliede n $-$ 2 Glieder vorausgehen; d. h., man erhält der Ordnung nach für a die Exponenten $m, m-1, m-2, m-3, \ldots m-(n-2), m-(n-1), \ldots$

Ist bei einer endlichen Reihe die Summe aller Glieder = n, so ist der Exponent des allgemeinen, und des ihm unmittelbar vorausgehenden Gliedes der Exponent des letzten und vorletzten Gliedes einer solchen Reihe.

2) Der Exponent des zweiten Theiles b ist im ersten Gliede = 0, im zweiten = 1, im dritten = 2,

im vierten = 3 2c., dann im $n$ten oder allgemeinen Gliede = $n - 1$, und in dem diesem unmitterbar vorausgehenden Gliede = $n - 2$, d. h., man erhält der Ordnung nach für b die Exponenten

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ n - 2, n - 1, \ldots$$

Drückt n die Anzahl aller Glieder der endlichen Reihe aus, so ist $n - 2$ der Exponent des vorletzten, und $n - 1$ der Exponent des letzten Gliedes einer solchen Reihe.

3) Der Koeffizient des ersten Gliedes ist = 1, der des zweiten $= \frac{m}{1}$, des dritten $= \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$, des vierten $= \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ 2c., dann der Koeffizient des allgemeinen Gliedes $= \frac{m(m-1)..(m-(n-2))}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}$, und des diesem unmittelbar vorhergehenden Gliedes $= \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-3))}{1 \cdot 2 \ldots (n-2}$, d. h., man erhält der Ordnung nach die Koeffizienten

$$1, \frac{m}{1}, \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}, \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \ldots \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-3))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)}, \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-2))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}, \ldots$$

Setzt man der Ordnung nach die Koeffizienten, und die Potenzen von a und b als Faktoren in Produkte zusammen, so erhält man nachstehende Formel, welche die angeführten Gesetze für den ersten Fall darstellt:

$$(a + b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 + \ldots \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-3))}{1 \cdot 2 \ldots (n-2)} \times a^{m-(n-2)} b^{n-2} + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-2)}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} a^{m-(n-1)} b^{n-1} + \ldots$$

b) Ist der Exponent der Würde eine positive gebrochene Zahl, und daher $a + b$ zur $\frac{m}{n}$ten Würde

zu erheben, so werden die aufgestellten Gesetze auf nachstehende Weise bezeichnet:

1) Der Exponent des ersten Theiles a ist im ersten Gliede $= \frac{m}{n}$ und in jedem folgenden Gliede der Bruch $\frac{m}{n}$, von dem aber so viele Einheiten subtrahirt werden, als Glieder vorausgehen; daher ist der Exponent des zweiten Gliedes $= \frac{m}{n} - 1$, und, wenn man den Bruch einrichtet (III. §. 67. Lehrs. II. Zus.) $= \frac{m-n}{n}$, der des dritten $= \frac{m}{n} - 2 = \frac{m-2n}{n}$, des vierten $= \frac{m}{n} - 3 = \frac{m-3n}{n}$ rc., d. h., man erhält für a der Ordnung nach die Exponenten

$$\frac{m}{n}, \frac{m-n}{n}, \frac{m-2n}{n}, \frac{m-3n}{n}, \ldots.$$

2) Der zweite Theil b hat die Exponenten 1, 2, 3...

3) Der Koeffizient des ersten Gliedes ist $= 1$, der des zweiten $= \frac{m}{n} : 1 = \frac{m}{n}$, des drittten $= \left(\frac{m}{n} \times \frac{m-n}{n}\right) : (1 \,.\, 2) = \frac{m(m-n)}{1 \,.\, 2 \,.\, n^2}$, des vierten $= \left(\frac{m}{n} \times \frac{m-n}{n} \times \frac{m-2n}{n}\right) : (1 \,.\, 2 \,.\, 3)$ $= \frac{m(m-n)\,(m-2n)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, n^3}$ rc., d. h., man erhält der Ordnung nach die Koeffizienten

$$1, \frac{m}{n}, \frac{m(m-n)}{1.2.n^2}, \frac{m(m-n)\,(m-2n)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, n^3}, \ldots.$$

Setzt man der Ordnung nach die Potenzen von a und b, und die Koeffizienten in Produkte, so erhält man für den zweiten Fall die Formel

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m-n}{n}} b + \frac{m(m-n)}{1 \,.\, 2 \,.\, n^2} \times$$

$$\times a^{\frac{m-2n}{n}} b^2, \quad \frac{m(m-n)(m-2n)}{1.2.3.n^3} \times a^{\frac{m-3n}{n}} b^3, \ldots\ldots$$

c) Ist der Exponent der Würde eine negative ganze Zahl, und daher $a \dagger b$ zur $-$ mten Würde zu erheben, so werden die erwähnten Gesetze auf diese Weise bezeichnet, und dann die drei Faktoren, wie vorhin bei der mten Potenz, der Ordnung nach in Produkte gesetzt:

1) Der Exponent des ersten Theiles a ist im ersten Gliede $= -m$, im zweiten $= -m-1$, im dritten $= -m-2$, im vierten $= -m-3$ ꝛc., d. h., man erhält für a der Ordnung nach die Exponenten $-m, -m-1, -m-2, -m-3, \ldots\ldots$

2) Die Exponenten von b sind die Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$

3) Der Koeffizient des ersten Gliedes ist $= 1$, der des zweiten $= -m : 1 = -\frac{m}{1}$, der des dritten $= (-m \times (-m-1)) : (1.2) = \frac{m(m \dagger 1)}{1.2}$, des vierten $= (-m \times (-m-1) \times (-m-2)) : (1.2.3) = -\frac{m(m \dagger 1)(m \dagger 2)}{1.2.3}$ ꝛc., indem nach der aufgestellten Multiplikations-Regel gleiche Zeichen $+$, und ungleiche $-$ geben (III. §. 56); um deßwillen hat man der Ordnung nach die Koeffizienten $1, -\frac{m}{1}, \frac{m(m \dagger 1)}{1.2}, -\frac{m(m \dagger 1)(m \dagger 2)}{1.2.3}, \ldots\ldots$

d) Ist endlich der Exponent der Würde eine negative gebrochene Zahl, und somit $a \dagger b$ zur $-\frac{m}{n}$ten Würde zu erheben, dann werden die bekannten Gesetze so bezeichnet:

1) Der Exponent des ersten Theiles a ist im ersten Gliede der Reihe $= -\frac{m}{n}$, im zweiten

$= -\frac{m}{n} - 1 = \frac{-m-n}{n}$, im dritten $= -\frac{m}{n} - 2 = \frac{-m-2n}{n}$, im vierten $= -\frac{m}{n} - 3 = \frac{-m-3n}{n}$ ꝛc., weßhalb die Größe a der Ordnung nach die Exponenten hat

$-\frac{m}{n}, \frac{-m-n}{n}, \frac{-m-2n}{n}, \frac{-m-3n}{n}, \ldots.$

2) Die Größe b hat, wie in den vorigen Fällen, die Exponenten 0, 1, 2, 3, ...

3) Der Koeffizient des ersten Gliedes der Reihe ist wieder = 1, der des zweiten $= -\frac{m}{n}$, des dritten $= \left(-\frac{m}{n} \times \frac{-m-n}{n}\right) : (1.2) = \frac{m(m+n)}{1.2.n^2}$, des vierten $= \left(-\frac{m}{n} \times \frac{-m-n}{n} \times \frac{-m-2n}{n}\right) : (1.2.3) = -\frac{m(m+n)(m+2n)}{1.2.3.n^3}$ ꝛc., d. h., man erhält die Koeffizienten

$1, -\frac{m}{n}, \frac{m(m+n)}{1.2.n^2}, -\frac{m(m+n)(m+2n)}{1.2.3.n^3}, \ldots.$

Setzt man die Potenzen von a und b, und die Koeffizienten in Produkte, so erhält man für den vierten Fall diese Formel:

$$(a+b)^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}} - \frac{m}{n} a^{\frac{-m-n}{n}} b$$

$$+ \frac{m(m+n)}{1.2.n^2} a^{\frac{-m-2n}{n}} b^2$$

$$- \frac{m(m+n)(m+2n)}{1.2.3.n^3} a^{\frac{-m-3n}{n}} b^3, \ldots.$$

I. Zusatz: Weil $a + b = a + \frac{ab}{a} = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$, so ist nach dem im III. Theile im §. 70. aufgestellten I. Grundsatze, und dem im nämlichen Theile im §. 71. vorkommenden Lehrsatze $(a + b)^m = a^m\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m$.

Drückt man $\frac{b}{a}$ mit e aus, so ist $(a+b)^m = a^m(1+e)^m$,

ferner $(a + b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}(1 + e)^{\frac{m}{n}}$, dann $(a + b)^{-m}$

$= a^{-m}(1 + e)^{-m}$, endlich $a^{-\frac{m}{n}}(1 + e)^{-\frac{m}{n}}$.

Wären nun die Gesetze des binomischen Lehrsatzes für $a + b$ als allgemein giltig erweisen, so würden sie auch für die zweitheilige Größe $1 + e$ gelten.

Nehmen wir an, es sei z. B.

$$(a + b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots$$

dann $a^m = a^m$

also $(a + b)^m : a^m = 1 + \frac{m}{1}a^{-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2}a^{-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}a^{-3}b^3 + \ldots\ldots$

Weil $(a + b)^m = a^m(1 + e)^m$, so ist $(a + b)^m : a^m = (1 + e)^m$; ferner ist $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ rc., und $a^{-1}b = \frac{b}{a}$, $a^{-2}b^2 = \frac{b^2}{a^2}$, $a^{-3}b^3 = \frac{b^3}{a^3}$ rc., da man hier Potenzen mit negativen Exponenen hat (III. §. 77. Zus. III.).

Substituirt man e anstatt $\frac{b}{a}$, e^2 anstatt $\frac{b^2}{a^2}$, e^3 anstatt $\frac{b^3}{a^3}$ ꝛc., so findet man, daß

$$(1+e)^m = 1 + \frac{m}{1} e + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} e^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} e + \ldots$$

Auf eine ähnliche Weise könnte man rücksichtlich der übrigen drei Potenzen in Absicht auf $1 + e$ die Giltigkeit der aufgestellten Gesetze beweisen; sind sie nämlich für $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, dann für $(a+b)^{-m}$, und für $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$ als giltig erwiesen, so gelten sie auch für $1 + e$, d. h., es ist

$$(1+e)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} e + \frac{m(m-n)}{1 \cdot 2 \cdot n^2} e^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3} e^3 + \ldots$$

dann $$(1+e)^{-m} = 1 - \frac{m}{1} e + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} e^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^3 + \ldots$$

endlich $$(1+e)^{-\frac{m}{n}} = 1 - \frac{m}{n} e + \frac{m(m+n)}{1 \cdot 2 \cdot n^2} e^2 - \frac{m(m+n)(m+2n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3} e^3 + \ldots$$

II. Zusatz: Und umgekehrt, sind die Gesetze für $1 + e$ erwiesen, so gelten sie auch für $a + b$; denn es sei z. B.

$$(1+e)^m = 1 + \frac{m}{1} e + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} e^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^3 + \ldots$$

a^m ist $= a^m$

also $$a^m(1+e)^m = a^m + \frac{m}{1} a^m e + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^m e^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^m e^3 + \ldots$$

Es ist ferner nach dem I. Zusatze $a^m(1+e)^m = (a+b)^m$, dann, wenn man anstatt e den Ausdruck $\frac{b}{a}$, anstatt e^2 die Größe $\frac{b^2}{a^2}$ ꝛc. substituirt,

$$a^m e = a^m \frac{b}{a} = a^{m-1} b, \; a^m e^2 = a^m \frac{b^2}{a^2} = a^{m-2} b^2,$$

$$a^m e^3 = a^m \frac{b^3}{a^3} = a^{m-3} b^3$$ ꝛc.; also ist

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \ldots$$

Auf eine ähnliche Weise könnte man rücksichtlich der drei übrigen Würden zeigen, daß die aufgestellten Gesetze für $a + b$ gelten, im Falle ihre Richtigkeit für $1 + e$ erwiesen ist.

III. Zusatz: Weil Irrationalzahlen durch Annäherung auf Rationalzahlen gebracht werden können, und der rationale Exponent der Würde eine ganze oder gebrochene Zahl, und in beiden Fällen eine positive oder negative Größe sein kann, so läßt sich der binomische Lehrsatz auf nachstehende vier besondere Lehrsätze zurückführen; sind diese als richtig erwiesen, so gelten die aufgestellten Gesetze allgemein für alle Potenzen mehrtheiliger Größen.

§. 85.

I. Lehrsatz:

Jede Potenz einer zweitheiligen Größe, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist, wird durch die Gesetze des §. 83. bestimmt; d. h.,

$$(a + b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} a^{m-3} b^3$$

$$+ \dots \frac{m(m-1)\,\dots\dots\,(m-(n-3))}{1\,.\,2\,\dots\,(n-2)} a^{m-(n-2)} b^{n-2} + \frac{m(m-1)\,\dots\,(m-(n-2))}{1\,.\,2\,\dots\,(n-1)} a^{m-(n-1)} b^{n-1} + \dots\dots b^m.$$

Beweis:

I. Man erhebe die zweitheilige Größe $a + b$ durch Multiplikation zu einigen Potenzen, etwa zur zweiten, dritten, vierten, fünften, sechsten und siebenten Potenz, indem man $a + b$ zwei-, drei-, viermal ꝛc. als Faktor setzet (III. §. 69. f.), so erhält man für die ersten 7 Dignitäten nachstehende Tabelle:

$a + b$,
$a^2 + 2ab + b^2$,
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$,
$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$,
$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$,
$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$;

II. Bei allen diesen Potenzen wird man finden, daß sie nach den Gesetzen des §. 83. bestimmt sind; denn man setze z. B. von der 7ten Potenz die Faktoren abgesondert unter einander:

$a^7, a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a^1, a^0$,
$b^0, b^1, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, b^7$,
$1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$

Die Reihe, welche die 7te Potenz von $a + b$ ausdrückt, enthält 8 Glieder, somit um ein Glied mehr, als der Exponent der 7ten Würde Einheiten hat (§. 83. Nro. 1.), und jedes Glied ist ein Produkt aus den im §. 83. Nro. 2. genannten drei Faktoren.

Die Exponenten von a und b sind dem im §. 83. bei Nro. 3 und 4 aufgestellten Gesetze gemäß.

Endlich ist nach Nro. 5. dieses §. der Koeffizient des ersten Gliedes $= 1$, dann der Koeffizient des zweiten Gliedes $= 7 = 7/1$, der des dritten $= 21 = \frac{7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2}$, der des vierten $= 35 = \frac{7 \,.\, 6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, u. s. f., folglich dem im erwähnten §. bei Nro. 5. angegebenen Gesetze gemäß.

III. Wenn nun die Gesetze des §. 83. für irgend eine Würde, deren Exponent als eine ganze positive Zahl durch m ausgedrückt wird, gelten, so sind sie auch für die nächst höhere Potenz, somit für die $m + 1$te Würde giltig:

Nun aber gelten sie für die ersten 7 Potenzen, und daher, wenn $m = 7$, für die mte Potenz, folglich auch für $m + 1$te oder die 8te Würde; so folgt ihre Giltigkeit für die 9te, und aus den nämlichen Gründen immer für die nächst höhere Potenz, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist, weßhalb die aufgestellten Gesetze allgemein für jede solche Potenz giltig sind.

IV. Daß diese Gesetze immer für die nächst höhere Potenz gelten, im Falle ihre Richtigkeit in Absicht auf die jedesmalige nächst niedere Potenz erwiesen ist, wird auf folgende Weise gezeigt:

1) Man nehme für irgend eine bestimmte Potenz die in der I. Tabelle vorkommende Formel als geltend an, was man wirklich thun kann, weil bei Nro. I. durch Multiplikation die Giltigkeit dieser Gesetze z. B. für die 7te Potenz von $a + b$ nachgewiesen wurde;

2) Um die Formel kürzer auszudrücken, bezeichne man den Koeffizienten des zweiten Gliedes mit A, den des dritten mit B rc., dann den Koeffizienten des

allgemeinen Gliedes mit N, und den des diesem unmittelbar vorhergehenden Gliedes mit M;

3) Man multiplizire die mte Potenz von $a + b$ mit der Wurzel $a + b$, so erhält man die nächst höhere Potenz, somit die $m + 1$te Würde von $a + b$;

4) Betrachtet man diese durch die Multiplikation erhaltene neue Reihe, so wird man finden, daß die aufgestellten Gesetze auch für die $m + 1$te Würde gelten; denn

a) Diese Reihe enthält um ein Glied mehr, als die vorige, hatte nun dieselbe $m + 1$ Glieder, so enthält die neue Reihe $m + 1 + 1 = m + 2$ Glieder, somit wieder um ein Glied mehr, als der Exponent $m + 1$ Einheiten hat (§. 83. Nro. 1.);

b) Jedes Glied ist wieder ein Produkt aus 3 Faktoren, nämlich aus einem Koeffizienten, und aus den Potenzen von a und b, weil zum ersten Gliede die Potenz $b^0 = 1$, und zum letzten die Potenz $a^0 = 1$ ohne Veränderung des Werthes hingesetzt werden kann (§. 83. Nro. 2.);

c) Der Exponent von a ist dem im §. 83. bei Nro. 3. aufgestellten Gesetze gemäß, nämlich im ersten Gliede der Exponent der Würde selbst oder $= m + 1$, im zweiten ist der Exponent $= m = (m + 1) - 1$, im dritten $= m - 1 = (m + 1) - 2$, u. s. f., dann der Exponent des allgemeinen Gliedes ist $= m - (n - 2) = (m + 1) - ((n + 1) - 2))$, indem die Differenz nicht verändert wird, wenn man zum Minuend und Subtrahend die nämliche Zahl addirt;

d) Der Exponent von b ist ebenfalls dem im §. 83. bei Nro. 4. aufgestellten Gesetze gemäß, da er im ersten Gliede $= 0$, im zweiten $= 1$, im dritten $= 2$ ist &c., dann im allgemeinen Gliede $= n - 1 = (n + 1) - 2$;

e) Endlich ist der Koeffizient des ersten Gliedes $= 1$, der des zweiten Gliedes $= A + 1 = m + 1 = \frac{m+1}{1}$, der des dritten $= A + B = \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} = \frac{m}{1}\left(\frac{2 + m - 1}{2}\right) = \frac{(m+1)m}{1.2}$, der des vierten

$$= B + C = \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$

$$= \frac{m(m-1)}{1.2}\left(1 + \frac{m-2}{3}\right) = \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{3+m-2}{3}\right)$$

$$= \frac{(m+1)\,m\,.\,(m-1)}{1.2.3}$$, u. s. f., dann ist der Koeffizient des allgemeinen Gliedes, oder

$$M + N = \frac{m(m-1)\ldots m-(n-3))}{1.2.3\ \ldots\ (n-2)}$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots m-(n-3)).(m-(n-2))}{1.2.3\ \ldots\ (n-2).(n-1)}$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots m-(n-3))}{1.2.3\ldots\ (n-2)}\left(1 + \frac{m-n+2}{n-1}\right)$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots m-(n-3))}{1.2.3\ldots\ (n-2)} \times \frac{m+1}{n-1}$$

$$= \frac{(m+1)\,m\,.(m-1)\ldots m-(n-3))}{1.2.3\ldots\ (n-2).(n-1}$$

$$= \frac{(m+1)\,m\,.(m-1)\ldots(m+1)-(n+1)-3))}{1.2.3\ \ldots\ ((n+1)-3).((n+1)-2)}.$$

Gelten daher die angeführten Gesetze für irgend eine bestimmte Potenz mit dem Exponenten m, so gelten sie allemal für die nächst höhere, d. h., für die m + 1te Potenz; nun ist aber bei Nro. I. ihre Giltigkeit z. B. für die 7te Potenz erwiesen, also gelten sie auch für die 7 + 1te, das ist, für die 8te Potenz; aus den nämlichen Gründen sind sie jetzt giltig für die 9te, dann für die 10te, und allgemein für jede nächst höhere Potenz, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist.

Anmerkung: 1) In den folgenden Lehrsätzen wird der Beweis in Absicht auf die drei übrigen Fälle für die zweitheilige Größe 1 + e geführt; gelten sie für dieses Binomium, so sind sie nach dem II. Zusatze des §. 84. auch für a + b giltig.

2) Weil aus der Reihe, welche die Gesetze des binomischen Lehrsatzes für $(1 + e)^{-\frac{m}{n}}$ angibt, der Be-

weis für die zu $(1 + e)^{-m}$ gehörige Reihe geführt wird, so werden im II. Lehrsatze die Gesetze für $(1 + e)^{\frac{m}{n}}$, im III. Lehrsatze für $(1 + e)^{-\frac{m}{n}}$, und im IV. Lehrsatze für $(1 + e)^{-m}$ als giltig bewiesen werden.

§. 86.

II. Lehrsatz:

Die Gesetze des binomischen Lehrsatzes gelten auch für Potenzen, derer Exponent eine positive gebrochene Zahl ist (§. 84. b.); oder, wenn m und n ganze positive Zahlen sind, so ist

$$(1 + e)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} e + \frac{m(m-n)}{1.2.n^2} e^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{1.2.3.n^3} e^3 + \ldots$$

Beweis:

1) Man setze die vorstehende ganze Reihe, mit Ausnahme des ersten Gliedes, gleich p, und erhebe dann p, und den gleichen Ausdruck zum Quadrate (§. 1.), und zum Kubus (§. 8.), indem man jedesmal nur die Glieder bis auf die dritte Potenz von e anschreibt, man erhält dadurch, daß

$$p = \frac{m}{n} e + \frac{m(m-n)}{1.2.n^2} e^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{1.2.3.n^3} e^3 + \ldots,$$

dann $p^2 = \frac{m^2}{n^2} e^2 + \frac{2m}{n} e \times \frac{m(m-n)}{1.2.n^2} e^2 + \ldots$

$$= \frac{m^2}{n^2} e^2 + \frac{m^2(m-n)}{n^3} e^3 + \ldots,$$

und $p^3 = \frac{m^3}{n^3} e^3 + \ldots;$

2) Man erhebe nach dem im vorigen §. aufgestell-

ten I. Lehrsatze die zweitheilige Größe $1+p$ zur $n$ten Würde, somit

$$(1+p)^n = 1 + \frac{n}{1}p + \frac{n(n-1)}{1.2}p^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}p^3 + \ldots;$$

3) In dieser Reihe setze man anstatt p, p^2 und p^3 die bei Nro. 1. angezeigten gleichen Werthe, man findet, daß

$$(1+p)^n = 1 + me + \left.\begin{matrix} \frac{m(m-n)}{1.2.n} \\ + \frac{m^2(n-1)}{1.2.n} \end{matrix}\right\} e^2 \left.\begin{matrix} + \frac{m(m-n)(m-2n)}{1.2.3.n^2} \\ + \frac{m^2(m-n)(n-1)}{1.2.n^2} \\ + \frac{m^3(n-1)(n-2)}{1.2.3.n^2} \end{matrix}\right\} e^3 + \ldots .$$

4) Nun ist

$$\frac{m(m-n)}{1.2.n} + \frac{m^2(n-1)}{1.2.n} = \frac{m^2 - mn + m^2n - m^2}{1.2.n} = \frac{m^2n - mn}{1.2.n} = \frac{m^2 - m}{1.2} = \frac{m(m-1)}{1.2};$$

dann ist $\frac{m(m-n)(m-2n)}{1.2.3.n^2} + \frac{m^2(m-n)(n-1)}{1.2.n^2}$

$$+ \frac{m^3(n-1)(n-2)}{1.2.3.n^2} = (m^3 - 3m^2n + 2mn^2 + 3m^3n - 3m^2n^2 - 3m^3 + 3m^2n + m^3n^2 - 3m^3n + 2m^3) : (1.2.3.n^2) = (m^3n^2 - 3m^2n^2 + 2mn^2) : (1.2.3.n^2)$$

$$= \frac{m^3 - 3m^2 + 2m}{1.2.3} = m\left(\frac{m^2 - 3m + 2}{1.2.3}\right)$$

$= \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, indem man die Zähler der

Brüche wirklich mit einander multiplizirte (III. §. 58. Beisp. III.), die Brüche dadurch unter gleiche Benennung brachte, daß man den Zähler und Nenner des mittleren mit 3 multiplizirte (III. §. 66. d.), und endlich die Produkte in Faktoren auflös'te (III. §. 86. u. 87.);

5) Man setze in der bei Nro. 3 vorkommenden Reihe, welche die nte Potenz von 1 † p ausdrückt, für die Koeffizienten die bei Nro. 4 gefundenen gleichen Werthe, man erhält

$$(1 + p)^n = 1 + me + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} e^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} e^3 + \ldots$$

Es ist aber auch nach dem I. Lehrsatze des vorigen §.

$$(1 + e)^m = 1 + me + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} e^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} e^3 + \ldots$$

Um deßwillen ist jetzt $(1 + e)^m = (1 + p)^n$;

6) Man ziehe auf beiden Seiten dieser Gleichung die Wurzel vom nten Grade aus (III. §. 70. I.), indem man allemal den Exponenten der Größe mit dem Exponenten des Wurzelzeichens dividirt (III. §. 78. Zus. I.): nach Nro. 5 ist $(1 + e)^m = (1 + p)^n$, und $(1 + e)^{\frac{m}{n}} = (1 + p)^{\frac{n}{n}}$, weßhalb $(1 + e)^{\frac{m}{n}} = 1 + p$, da $\frac{n}{n} = 1$, und jede Größe mit dem Exponenten 1 die unveränderte Größe selbst ist (III. §. 74. Zus. II.);

7) Man setze endlich anstatt p den bei Nro. 1 vorkommenden gleichen Werth, so findet man, daß

$$(1 + e)^{\frac{m}{n}} = 1 + p = 1 + \frac{m}{n} e + \frac{m(m-n)}{1\,.\,2\,.\,n^2} e^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,n^3} e^3 + \ldots$$

Diese Reihe, welche dem Gesagten gemäß die $\frac{m}{n}$te Potenz von 1 † e ausgedrückt, ist den im §. 83. aufgestellten Gesetzen gemäß (§. 84. b.); daher gelten die Gesetze des binomischen Lehrsatzes auch für alle Potenzen mehrtheiliger Größen, derer Exponent eine positive gebrochene Zahl, oder ein positiver Bruch ist (§. 84. Zus. II.).

§. 87.

III. Lehrsatz:

Die Gesetze des binomischen Lehrsatzes gelten auch für Potenzen, derer Exponent ein negativer Bruch ist (§. 84. d.), oder

$$(1+e)^{-\frac{m}{n}} = 1 - \frac{m}{n}e + \frac{m(m+n)}{1 \,.\, 2 \,.\, n^2}e^2 - \frac{m(m+n)\,(m+2n)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, n^3}e^3 + \ldots$$

Beweis:

1) Man erhebe nach dem vorigen §. die zweitheilige Größe 1 + e zur $\frac{m}{n}$ten Würde, schreibe unter diese Gleichung links $(1+e)^{-\frac{m}{n}}$, und rechts die Reihe, welche den Gesetzen des binomischen Lehrsatzes gemäß die $-\frac{m}{n}$te Potenz von 1 + e ausdrückt, man multiplizire auf beiden Seiten, setze die Glieder bis auf die dritte Potenz von e an, und bringe die Partialprodukte in eine Summe, indem man immer die Koeffizienten der gleichartigen Glieder, wo die nämliche Potenz von e vorkömmt, addirt (III. §. 75.); man erhält dadurch:

$$(1+e)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}e + \frac{m(m-n)}{1.2.n^2}e^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{1.2.3.n^3}e^3 + \ldots$$

$$(1+e)^{-\frac{m}{n}}, 1 - \frac{m}{n}e + \frac{m(m+n)}{1.2.n^2}e^2 - \frac{m(m+n)(m+2n)}{1.2.3.n^3}e^3 + \ldots$$

$$(1+e)^{\frac{m}{n}} \times (1+e)^{-\frac{m}{n}} = 1 + \left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right)e + \left.\begin{array}{l} + \frac{m(m-n)}{1.2.n^2} \\ - \frac{m^2}{n^2} \\ + \frac{m(m+n)}{1.2.n^2} \end{array}\right\} e^2 + \left.\begin{array}{l} + \frac{m(m-n)(m-2n)}{1.2.3.n^3} \\ - \frac{m^2(m-n)}{1.2.n^3} \\ + \frac{m^2(m+n)}{1.2.n^3} \\ - \frac{m(m+n)(m+2n)}{1.2.3.n^3} \end{array}\right\} e^3 + \ldots\ldots$$

2) Diese zwei Produkte sind wirklich einander gleich, da jedes $= 1$ ist; denn $(1+e)^{\frac{m}{n}} \times (1+e)^{-\frac{m}{n}} = (1-e)^0 = 1$, weil jede Größe mit dem Exponenten 0 gleich 1 ist (III. §. 77. Zus. II.); ferner sind im zweiten Produkte die Koeffizienten aller Glieder,

mit Ausnahme des ersten Gliedes, gleich Null, und deßhalb außer dem ersten Gliede 1 alle Glieder = 0, wie dieses aus Nachstehendem ersichtlich ist:

Der Koeffizient des zweiten Gliedes ist $= \frac{m}{n} - \frac{m}{n} = 0$;

Der Koeffizient des dritten Gliedes ist

$$= \frac{m(m-n)}{1.2.n^2} - \frac{m^2}{n^2} + \frac{m(m+n)}{1.2.n^2}$$

$$= \frac{m^2 - mn - 2m^2 + m^2 + mn}{1\,.\,2\,.\,n^2} = 0;$$

Der Koeffizient des vierten Gliedes ist

$$= \frac{m(m-n)(m-2n)}{1.2.3.n^3} - \frac{m^2(m-n)}{1.2.n^3} + \frac{m^2(m+n)}{1.2.n^3}$$

$$- \frac{m(m+n)(m+2n)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,n^3} = (m^3 - 3m^2n + 2mn^2$$

$$- 3m^3 + 3m^2n + 3m^3 + 3m^2n - m^3 - 3m^2n$$

$$- 2mn^2) : (1\,.\,2\,.\,3\,.\,n^3) = 0.$$

Eben so sind alle folgende Koeffizienten, und somit alle folgende Glieder = 0; daher ist auch das zweite Produkt = 1;

3) Sind die Produkte gleich, und die beiden Multiplikanden, so müssen auch die Multiplikatoren gleich sein, weil nur Gleiches mit Gleichem multiplizirt Gleiches geben kann (I. §. 46.); die für $(1+e)^{-\frac{m}{n}}$ angenommene Reihe ist also die wahre, und die Gesetze des binomischen Lehrsatzes gelten auch für Potenzen, derer Exponenten negative Brüche sind (§. 84. Zus. II.);

d. h., $(1+e)^{-\frac{m}{n}} = 1 - \frac{m}{n}\,e + \frac{m(m+n)}{1.2.n^2}\,e^2$

$$- \frac{m(m+n)(m+2n)}{1.2.3.n^3}\,e^3 + \ldots.$$

§. 88.

IV. Lehrsatz:

Die Gesetze des binomischen Lehrsatzes gelten auch für Potenzen, derer Exponenten negative ganze Zahlen sind (§. 84. c.), oder

$$(1+e)^{-m} = 1 - \frac{m}{1}e + \frac{m(m+1)}{1.2}e^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}e^3 + \ldots.$$

Beweis:

Nach dem vorigen §. ist

$$(1+e)^{-\frac{m}{n}} = 1 - \frac{m}{n}e + \frac{m(m+n)}{1.2.n^2}e^2 - \frac{m(m+n)(m+2n)}{1.2.3.n^3}e^3 + \ldots.$$

2) Setzet man $n = 1$, so ist $-\frac{m}{n} = -\frac{m}{1} = -m$, und $n^2 = 1$, dann $n^3 = 1$ rc. Daher

$$(1+e)^{-m} = 1 - me + \frac{m(m+1)}{1.2}e^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}e^3 + \ldots.$$

Es gelten also auch die aufgestellten Gesetze für die Potenzen mit ganzen negativen Exponenten (§. 84. Zus. II.).

Auf diese Weise ist die Giltigkeit der Gesetze des binomischen Lehrsatzes für die vier angeführten Fälle erwiesen, wenn nämlich der Exponent der Würde eine ganze oder gebrochene, dann eine positive oder negative Zahl ist; sie gelten also allgemein für jede Potenz einer mehrtheiligen Größe, das ist, nach denselben kann jede mehrtheilige Größe zu jeder beliebigen Würde erhoben, und deßhalb auch aus einer solchen Größe jede beliebige Wurzel ausgezogen werden.

§. 89.

Entwickelung solcher Formeln, welche in einigen Fällen zur Anwendung bequemer sind, als die bisher aufgestellten.

I. Setzet man in der Formel, welche für $1 + e$ die mte Potenz ausdrückt (§. 84. Zus. II.), anstatt $e = \frac{b}{a}$ den Buchstaben q, so ist

$$(a + b)^m = a^m(1 + q)^m = a^m(1 + mq + \frac{m(m-1)}{1 . 2}q^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3}q^3 + \ldots)$$

$$= a^m + ma^m q + \frac{m(m-1)}{1 . 2}a^m q^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3}a^m q^3 + \ldots$$

Hier ist jedes Glied durch sein vorgehendes theilbar, somit kömmt jedes Glied im nächst folgenden als Faktor vor; drückt man nun das erste Glied durch A, das zweite durch B, und so der Ordnung nach die folgenden durch C, D, E 2c. aus, so ist

$$(a + b)^m = a^m + mAq + \frac{m-1}{2}Bq + \frac{m-2}{3}Cq + \frac{m-3}{4}Dq + \frac{m-4}{5}Eq + \frac{m-5}{6}Fq + \ldots .$$

II. Auf die nämliche Art erhält man für die Potenzen mit gebrochenen Exponenten (§. 84. b. u. d.), daß

$$(a + b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}Aq + \frac{m-n}{2n}Bq + \frac{m-2n}{3n}Cq + \frac{m-3n}{4n}Dq + \frac{m-4n}{5n}Eq + \ldots .$$

Anmerkung: Es bedarf für die negativen Exponenten keiner eigenen Formeln, weil die Potenzen mit solchen Ex-

ponenten nach den bisher aufgestellten Formeln ohne Anstand bestimmt werden können, wenn man auf die Zeichen die gehörige Rücksicht nimmt.

§. 90.

I. Aufgabe, jede mehrtheilige Größe zu einer Würde zu erheben, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist.

Auflösung:

1) Man nehme alle Theile der gegebenen Größe, mit Ausnahme des letzten Theiles, für das erste Glied a, und den letzten Theil für das zweite Glied b an;

2) Man bezeichne den Exponenten der verlangten Würde mit m;

3) Man berechne nach der Formel des §. 85., oder, was manchmal bequemer ist, nach der im §. 89. aufgestellten ersten Formel, indem e, welches $= \frac{b}{a}$, gleich q gesetzt wird, um ein Glied mehr, als der Exponent m Einheiten hat, somit m † 1 Glieder, und substituire die gefundenen Werthe;

4) Ist das zweite Glied einer zweitheiligen Größe, die man zur Potenz erhebt, negativ, so nehme man die Glieder, wo die Exponenten der Potenz des zweiten Gliedes ungerad sind, negativ, alle übrigen Glieder aber positiv (III. §. 73.).

I. Beispiel:

Man erhebe ⅓f † 4g zur vierten Würde.

I. Auflösung:

Benützt man zur Auflösung die Formel des §. 85., durch welche die mte Potenz von a † b ausgedrückt ist, so nimmt man davon, weil in diesem Beispiele der Exponent m = 4, und die Anzahl aller Glieder oder n = m † 1 = 4 † 1 = 5 ist, die 5 ersten Glie-

der, und setzet $\frac{1}{3}f = a$, und $4g = b$; man findet auf diese Weise, daß

$a^m = (\frac{1}{3}f)^4 = \frac{1}{81}f^4$,

$ma^{m-1}b = 4(\frac{1}{3}f)^3 \times 4g = \frac{16}{27}f^3g$,

$\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 = \frac{4.3}{1.2}(\frac{1}{3}f)^2 \times (4g)^2 = \frac{32}{3}f^2g^2$,

$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 = \frac{4.3.2}{1.2.3} \times \frac{1}{3}f(4g)^3$

$= \frac{256}{3}fg^3$, endlich

$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 = \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}$

$\times (\frac{1}{3}f)^0 \times (4g)^4 = (4g)^4 = 256g^4$.

Es ist also, wenn man der Ordnung nach die gefundenen Glieder zusammenschreibt, $(\frac{1}{3}f + 4g)^4 = \frac{1}{81}f^4 + \frac{16}{27}f^3g + \frac{32}{3}f^2g^2 + \frac{256}{3}fg^3 + 256g^4$.

II. Auflösung:

Einfacher und bequemer ist die Auflösung nach der im §. 89. aufgestellten ersten Formel, wenn man $a = \frac{1}{3}f$, dann $b = 4g$, und $q = \frac{b}{a} = 4g : \frac{1}{3}f = 12\frac{g}{f}$, wie auch $m = 4$ setzet, und von der Reihe, welche die mte Potenz von $a + b$ ausdrückt, die 5 ersten Glieder auf nachstehende Weise benützt:

$a^m = (\frac{1}{3}f)^4 = \frac{1}{81}f^4 = A$,

$mAq = 4 \times \frac{1}{81}f^4 \times 12\frac{g}{f} = \frac{16}{27}f^3g = B$,

$\frac{m-1}{2}Bq = \frac{3}{2} \times \frac{16}{27}f^3g \times 12\frac{g}{f} = \frac{32}{3}f^2g^2 = C$,

$\frac{m-2}{3}Cq = \frac{2}{3} \times \frac{32}{3}f^2g^2 \times 12\frac{g}{f} = \frac{256}{3}fg^3 = D$,

endlich $\frac{m-3}{4}Dq = \frac{1}{4} \times \frac{256}{3}fg^3 \times 12\frac{g}{f}$

$= 256g^4 = E$.

Es ist daher, wenn man wieder der Ordnung nach die gefundenen Glieder zusammenschreibt,

$(\frac{1}{3}f + 4g)^4 = \frac{1}{81}f^4 + \frac{16}{27}f^3g + \frac{32}{3}f^2g^2 + \frac{256}{3}fg^3 + 256g^4$.

II. Beispiel:

Man erhebe die dreitheilige Größe $m + n + p$ zur 5ten Potenz.

Auflösung:

Man betrachte die beiden ersten Theile als ein Glied, und setze somit $m + n = a$, und $p = b$, man erhält nach der Formel des §. 85., da man die Koeffizienten leicht aus den vorausgehenden Exponenten des ersten Theiles bestimmen kann, und die Potenzen von $m + n$ bloß angezeigt werden, nachstehende Reihe zur verlangten 5ten Potenz dieser dreitheiligen Größe:

$$(m + n + p)^5 = (m + n)^5 + 5(m + n)^4 p$$
$$+ 10(m + n)^3 p^2 + 10(m + n)^2 p^3 + 5(m + n) p^4 + p^5.$$

III. Beispiel:

Man erhebe $a - b$ zur 5ten Würde.

Auflösung:

Weil die Potenzen einer negativen Größe bei geraden Exponenten positiv, und bei ungeraden negativ sind, so erhält man nach der im §. 85. aufgestellten Formel, welche für $a + b$ die mte Potenz darstellt, folgende Reihe für $a - b$ als die verlangte 5te Potenz:

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b^2 - 10a^2 b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

§. 91.

II. Aufgabe, eine mehrtheilige Größe zu einer Würde zu erheben, deren Exponent eine negative ganze Zahl, oder ein positiver oder negativer Bruch ist.

Auflösung:

1) Man theile wieder die gegebene Größe in zwei Theile, nehme den ersten für a, und den zweiten für b, und den Exponenten für m oder $\frac{m}{n}$, je nachdem der Exponent der verlangten Dignität eine ganze oder gebrochene Zahl ist;

2) Weil bei diesen Potenzen die Reihe allemal unendlich ist, so bestimme man, im Falle die Reihe abnimmt, nach den im §. 84. angeführten Formeln, oder, was in vielen Fällen bequemer ist, nach der ersten oder zweiten Formel des §. 89. so viele Glieder, als die vorliegende Aufgabe fodert, damit die folgenden als verschwindend weggelassen werden dürfen: wächst hingegen die Reihe, so ist die Auflösung unmöglich, weil dann die Potenz nicht dargestellt werden kann.

3) Ist das zweite Glied negativ, so nehme man nach den im III. Thl. §. 73. aufgestellten Regeln auf die Zeichen die geeignete Rücksicht.

I. Beispiel:

Man ziehe aus 68 die Kubikwurzel aus.

Auflösung:

1) Man zerfälle die Zahl 68 in zwei Summanden, von welchen der erste die vollkommene Kubikzahl 64, und der zweite $= 4$ ist, und ziehe aus $64 + 4$ die Kubikwurzel aus, oder was eines ist, man erhebe $64 + 4$ zur Potenz mit dem Exponenten $1/3$, da $68 = 64 + 4$, und deßhalb $\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{(64+4)} = (64+4)^{1/3}$;

2) Man setze $a = 64$, ferner $b = 4$, dann $\frac{m}{n} = 1/3$, und $\frac{b}{a} = q = 4/64 = 1/16$, und berechne nach der zweiten Formel des §. 89., indem die Reihe schnell abnimmt, die 6 ersten Glieder;

3) Man gebe der gefundenen ganzen Zahl die Gestalt eines Dezimalbruches (III. §. 6.), und verwandle die gemeinen Brüche in Dezimalbrüche mit sieben Dezimalstellen (III. §. 7.);

4) Man bringe die positiven Glieder in eine Summe, und eben so die negativen, die Differenz dieser beiden Summen gibt die verlangte Kubikwurzel von 68, welche $= 4{,}0816551\ldots$; denn

$$a^{\frac{m}{n}} = 64^{1/3} = 4 = 4{,}0000000 = A,$$

$$\frac{m}{n} Aq = 1/3 \times 4 \times 1/16 = 1/12 = 0{,}0833333 = B,$$

$$\frac{m-n}{2n} Bq = \frac{1-3}{6} \times 0{,}0833333 \times 1/16$$
$$= -\,0{,}0017361 = C,$$

$$\frac{m-2n}{3n} Cq = \frac{1-6}{9} \times -\,0{,}0017361 \times 1/16$$
$$= 0{,}0000603 = D,$$

$$\frac{m-3n}{4n} Dq = \frac{1-9}{12} \times 0{,}0000603 \times 1/16$$
$$= -\,0{,}0000025 = E;$$

$$\frac{m-4n}{5n} Eq = \frac{1-12}{15} \times -\,0{,}0000025 \times 1/16$$
$$= 0{,}0000001 = F.$$

A	= 4,0000000	C	= — 0,0017361
B	= 0,0833333	E	= — 0,0000025
D	= 0,0000603	Summe	= — 0,0017386
F	= 0,0000001		
Summe	= 4,0833937		

Daher ist die Potenz $(64 + 4)^{1/3}$, oder $\sqrt[3]{68}$ $= 4{,}0833937 - 0{,}0017386 = 4{,}0816551 \ldots\ldots$

II. Beispiel:

Man soll aus $a^2 \pm x$ die Quadratwurzel ausziehen, somit die zweitheilige Größe $a^2 \pm x$ zu einer Würde mit Exponenten ½ erheben (III. §. 78. Zus. I.).

Auflösung:

1) Weil $\sqrt{(a^2 \pm x)} = (a^2 \pm x)^{1/2}$, so ist in diesem Beispiele das erste Glied $a^2 = a$, das zweite $\pm x = b$, und $\frac{b}{a} = q = \pm \frac{x}{a^2}$, dann $1 = m$, $2 = n$, und $\frac{m}{n} = 1/2$.

2) Man berechne nach der zweiten Formel des §. 89. einige Glieder

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^2)^{1/2} = a = A,$$

$$\frac{m}{n} Aq = \tfrac{1}{2} \times a \times \pm \frac{x}{a^2} = \pm \frac{x}{2a} = B,$$

$$\frac{m-n}{2n} Bq = -\tfrac{1}{4} \times \pm \frac{x}{2a} \times \pm \frac{x}{a^2}$$

$$= -\frac{1 \, . \, x^2}{2 \, . \, 4 \, . \, a^3} = C,$$

$$\frac{m-2n}{3n} Cq = -\tfrac{1}{2} \times -\frac{x^2}{2 \, . \, 4 \, . \, a^3} \times \pm \frac{x}{a^2}$$

$$= \pm \frac{1 \, . \, 3 \, . \, x^3}{2 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, a^5} = D,$$

$$\frac{m-3n}{4n} Dq = -\tfrac{5}{8} \times \pm \frac{1 \, . \, 3 \, . \, x^3}{2 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, a^5} \times \pm \frac{x}{a^2}$$

$$= -\frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, x^4}{2 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, 8 \, . \, a^7} = E.$$

Daher ist $\sqrt{(a^2 \pm x)} = a \pm \frac{x}{2 \, . \, a} - \frac{1 \, . \, x^2}{2 \, . \, 4 \, . \, a^3}$ $\pm \frac{1 \, . \, 3 \, . \, x^3}{2 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, a^5} - \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, x^4}{2 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, 8 \, . \, a^7} \pm \ldots\ldots$

Auf die nämliche Weise kann man aus $a^3 \pm x$ die Kubikwurzel ausziehen, indem man das Binomium $a^3 \pm x$ zur Würde mit dem Exponenten $\frac{1}{3}$ erhebt; es ist

$$\sqrt[3]{(a^3 \pm x)} = a \pm \frac{x}{1 \, . \, 3 \, . \, a^2} - \frac{2 \, . \, x^2}{1 \, . \, 2 \, . \, 3^2 \, . \, a^5}$$
$$\pm \frac{2 \, . \, 5 \, . \, x^3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 3^3 \, . \, a^8} - \frac{2 \, . \, 5 \, . \, 8 \, . \, x^4}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \, . \, 3^4 \, . \, a^{11}} \pm \ldots$$

Nach der hier gesetzten Formel $\sqrt[3]{(a^3 \pm x)} = (a^3 \pm x)^{1/3}$ läßt sich aus 68 die Kubikwurzel geschwinder auszie-

hen, als es in der beim I. Beispiele angeführten Auflösung geschehen ist.

Ich werde am Ende dieses §. in der dritten und vierten Anmerkung auf einige Vortheile aufmerksam machen, die man sich in Betreff der Benützung dieser Formeln bei der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln aus Zahlen verschaffen kann.

III. Beispiel:

Man erhebe $a + b$ zur Würde mit dem Exponenten -3.

Auflösung:

Weil in diesem Beispiele $-3 = -m$, so erhält man nach der im §. 84. bei c. angeführten Formel, welche für $a + b$ die mte Würde angibt, nachstehende Reihe als die verlangte Würde:

$$(a + b)^{-3} = a^{-3} - \tfrac{3}{1}a^{-4}b + \frac{3\,.\,4}{1\,.\,2}a^{-5}b^2 - \frac{3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3}a^{-6}b^3 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{a^3} - \frac{3b}{a^4} + \frac{6b^2}{a^5} - \frac{10b^3}{a^6} + \ldots\ldots$$

IV. Beispiel:

Man erhebe $a + x$ zur Würde mit dem Exponenten $-\tfrac{3}{4}$.

Auflösung:

Man benütze die zweite Formel des §. 89., und setze anstatt $\frac{m}{n}$ den in diesem Beispiele vorkommenden Exponenten $-\tfrac{3}{4}$, man erhält, da q gleich $\frac{x}{a}$ ist, folgende Glieder:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = A,$$

$$\frac{m}{n} Aq = -\,{}^3\!/_4 \times \frac{1}{a^{3/4}} \times \frac{x}{a} = -\,\frac{3\,.\,x}{4\,.\,a^{7/4}} = B,$$

$$\frac{m-n}{2n} Bq = -\,{}^7\!/_8 \times -\,\frac{3x}{4\,.\,a^{7/4}} \times \frac{x}{a}$$

$$= \frac{3\,.\,7\,.\,x^2}{2\,.\,4^2\,.\,a^{11/4}} = C,$$

$$\frac{m-2n}{3n} Cq = -\,{}^{11}\!/_{12} \times \frac{3\,.\,7\,.\,x^2}{2\,.\,4^2\,.\,a^{11/4}} \times \frac{x}{a}$$

$$= -\,\frac{3\,.\,7\,.\,11\;x^3}{2\,.\,3\,.\,4^3\,.\,a^{15/4}} = D.$$

Mithin ist $(a + x)^{-3/4}$

$$= \frac{1}{a^{3/4}} - \frac{3\,.\,x}{4\,.\,a^{7/4}} + \frac{3.7.x^2}{2.4^2.a^{11/4}} - \frac{3.7.11.x^3}{2\,.\,3\,.\,4^3\,.\,a^{15/4}} + \ldots$$

Anmerkung: 1) Man muß aus der vorliegenden Aufgabe ermessen, ob man nach den Formeln des §. 89., oder nach den in dem §. 84. bei a, b, c und d aufgestellten Formeln bequemer die verlangte Potenz der mehrtheiligen Größe finden könne.

2) Wenn der Exponent der Würde keine ganze positive Zahl ist, und somit die Reihe unendlich ist, so berechnet man jedesmal so viele Glieder, als die Genauigkeit der gegebenen Aufgabe erfodert.

3) Die beim II. Beispiele dieses §. vorkommenden Reihen geben die allgemeinen Formeln an, nach welchen durch Annäherung aus unvollkommenen Potenzen die Quadrat- oder Kubikwurzeln in Zahlen ausgezogen werden können.

Man löset nämlich die gegebene Quadrat- oder Kubikzahl so in Summanden, oder auch in eine Differenz auf, daß immer der erste Theil eine vollkommene Quadrat- oder Kubikzahl ist, und sieht darauf, daß der erste Theil in Absicht auf den andern ziemlich groß ist, damit die Reihe schnell abnimmt, und wenige Glieder ein genaues Resultat geben.

Daher erhält man z. B. die Quadratwurzel von 30, wenn $30 = 25 + 5$, oder, was noch bequemer ist, $= 36 - 6$, und nach der Reihe, welche zu $a^2 \pm x$ die Quadratwurzel angibt, einige Glieder berechnet, und dieselben zuletzt in der Gestalt der Dezimalbrüche darstellt,

da nach der aufgestellten Formel $q = \frac{b}{a} = \pm \frac{x}{a^2}$, und $^6/_{36}$ oder $^1/_6$ kleiner ist, als $^5/_{25}$ oder $^1/_5$.

Eine noch schneller abnehmende Reihe würde man für $\sqrt{30}$ erhalten, wenn man 30 mit einer vollkommenen Quadratzahl, etwa mit 100 multipliziren, dann in der Gestalt eines Bruches dividiren, und aus 100 auf die gewöhnliche Weise, aus $30 \times 100 = 3000$ aber nach der Formel $\sqrt{(a^2 - x)} =$ ꝛc. dadurch die Quadratwurzel ausziehen würde, daß man 3000 gleich 3025 — 25 setzet, wo dann $a^2 = 3025$, $x = 25$, und $\frac{x}{a^2} = {}^{25}/_{3025}$ $= {}^1/_{121}$.

4) Weil $\sqrt{(a^2 \pm x)} = a \pm \frac{x}{2 \cdot a} - \ldots$, und $\sqrt[3]{(a^3 \pm x)} = a \pm \frac{x}{1 \cdot 3 \cdot a^2} - \ldots$, so erhält man auf dem Wege der Annäherung die Quadrat- oder Kubikwurzel schon um noch einige Ziffern richtiger, wenn man beim Quadrate den Rest aus dem Quadrate der gefundenen Ziffern und der gegebenen Quadratzahl mit dem Duplum der gefundenen Wurzel, und beim Kubus den Rest aus dem Kubus der gefundenen Ziffern und der gegebenen Kubikzahl mit dem dreifachen Quadrate der schon gefundenen Wurzel dividirt.

Um deßwillen ist z. B. $\sqrt{675915} = \sqrt{(675684 + 231)} = 822 + \frac{231}{2 \cdot 822} = 822{,}1405 \ldots\ldots$, wo die dritte Dezimalstelle noch richtig ist, weil das folgende Glied der vierten Stelle kein bedeutliches Ziffer mehr gibt; eben so ist $\sqrt[3]{572319} = \sqrt[3]{(571787 + 532)} = 83 + \frac{532}{3 \cdot 83^2} = 83{,}02574 \ldots\ldots$, wo das vierte Dezimalziffer noch richtig ist.

5) In verschiedenen Lehrbüchern findet man in Absicht auf den binomischen Lehrsatz verschiedene Beweise. Der kaiserlich königlich österreichische Oberstlieutenant, Georg Freiherr von Vega, leitet in seinen mathematischen Vorlesungen (I. Band, die Rechenkunst und Algebra enthaltend) diesen Lehrsatz für ganze

positive Exponenten aus der Lehre von den höheren arithmetischen Reihen ab, und beweiset dann die Giltigkeit desselben für alle Potenzen durch eine logarithmische Reihe.

Der königl. würtembergische Herr Hofrath C. F. Kausler, Professor der Mathematik und Physik am kön. Gymnasium zu Stuttgart, und Mitglied der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, führt in den von ihm herausgegebenen Auszügen (Stuttgart in der königl. Hof- und Kanzlei-Buchdruckerei der Gebrüder Mäntler) ebenfalls mittels der Reihen einen Beweis an.

Die von mir in diesem Abschnitte vorgetragenen Beweise sind die nämlichen, welche der Herr geistliche Rath und Stadtpfarrer Professor Magold in dem I. Theile seines mathematischen Lehrbuches anführt.

II. Abschnitt.

Von den Permutationen, und Kombinationen.

§. 92.

Erklärungen.

a) Unter der Permutation versteht man eine solche Versetzung mehrerer Dinge unter einander, daß sie immer in einer anderen Ordnung auf einander folgen.

Ich bestimme daher z. B. die Anzahl der Permutationen, die man auch Verwechselungen oder Versetzungen nennt, wenn ich angebe, wie oft vier Personen an einem Tische ihre Plätze verwechseln können, oder wenn ich bestimme, wie oft sich die Buchstaben eines gewissen Wortes versetzen lassen.

b) Wenn man aus einer gegebenen Menge von Dingen so viele Verbindungen nach Zweien, Dreien, Vieren rc. darstellt, als es angeht, so heißt diese Ope-

ration eine Kombiniren, und jede einzelne Verbindung wird eine Kombination genannt, und zwar

α) ohne, oder

β) mit Wiederholungen, je nachdem in einer Verbindung das nämliche Ding nur einmal, oder mehrmal gesetzt werden darf.

c) Wenn man hingegen für n gegebene Dinge nicht nur alle Kombinationen, sondern auch alle Permutationen, die bei jeder Kombination möglich sind, bestimmt, so heißt dieses Verfahren ein Variren, und die einzelnen Verbindungen nennt man Variationen, und zwar

α) ohne, oder

β) mit Wiederholungen, je nachdem in einer einzelnen Variation das nämliche Ding nur ein- oder mehrmal gesetzt werden darf.

d) Die Verbindungen zu Zweien nennt man Amben, die Verbindungen zu Dreien nennt man Ternen, die Verbindungen zu Vieren heißen Quaternen ꝛc.;

e) Bei den angeführten Operationen werden die einzelnen Verbindungen nach der Anzahl der in einer Kombination oder Variation enthaltenen Elemente oder Dinge auch Binionen, Ternionen, Quaternionen ꝛc. genannt.

I. Zusatz: Zwei Verbindungen von gleicher Anzahl Dinge können sich entweder durch die Verschiedenheit der Dinge selbst, das ist materiel, wie z. B. die Ternen abc und abd, oder bloß durch verschiedene Stellungen eben dieser Dinge, das ist, bloß formel unterscheiden, wie z. B. abc und bac.

II. Zusatz: Aus jeder Kombination lassen sich also durch Permutation mehrere formel verschiedene Verbindungen ableiten, mithin faßt das Variren sowohl das Kombiniren, als auch das Permutiren in sich.

§. 93.

I. Lehrsatz:

Die Anzahl der Permutationen erhält man, wenn man, von 1 angefangen, so

viele in natürlicher Ordnung fortlaufende Zahlen mit einander multiplizirt, als Dinge gegeben sind; d. h., bei gegebenen n Dingen ist die Anzahl der Versetzungen, oder S = 1 . 2 . 3 . 4 . . . . (n — 1) . n.

Beweis:

1) In der II. Tabelle A. enthält die erste lothrechte Spalte zur Linken die gegebenen Dinge, und zur rechten Seite kommen die möglichen Versetzungen vor; man sieht hier,

2) Daß ein Ding a nur eine Stelle einnehmen kann; kömmt aber das zweite Ding b dazu, so kann es zwei Stellen, die erste und zweite einnehmen, nämlich ba und ab, somit ist bei zwei Dingen die Anzahl der Versetzungen = 1 . 2;

3) Das dritte Ding c kann bei jeder der vorigen Versetzungen drei Stellen, nämlich am Anfange, in der Mitte und am Ende einnehmen, folglich muß die Anzahl der vorigen Versetzungen von zwei Dingen mit 3 multiplizirt werden, oder die Anzahl der Versetzungen von 3 Dingen ist = 1 . 2 . 3;

4) Das vierte Ding d gibt wieder mit jeder der vorigen Versetzungen von 3 Dingen vier neue, das ist, es kann bei jeder der vorigen Versetzungen die erste, zweite, dritte und vierte Stelle einnehmen, somit ist bei 4 Dingen die Anzahl der Versetzungen = 1 . 2 . 3 . 4;

5) Gilt nun das angeführte Gesetz für irgend eine Anzahl der Dinge, z. B. für m Dinge, so gilt es auch bei der nächst höheren Anzahl m † 1 derselben; denn wenn bei m Dingen die Anzahl der Versetzungen = 1 . 2 . 3 . 4 . . . . m, so läßt sich das neue hinzukommende (m † 1)te Ding mit jeder der vorigen Permutationen (m † 1)mal versetzen, weil es da (m † 1) Stellen gibt, wo es stehen kann, mithin ist die Anzahl der Versetzungen = 1.2.3.4 . . . (m — 1). m(m † 1);

6) Durch Induktion ist von Nro. 1 — 4 das angeführte Gesetz für 4 Dinge erwiesen, also folgt aus Nro. 5. die Giltigkeit desselben für 5 Dinge, und aus diesen für 6 Dinge, u. s. f., folglich ist allge-

mein die Anzahl der Versetzungen bei n Dingen $= 1 . 2 . 3 . 4 \ldots . (n - 1) . n$.

I. Zusatz: Die fünf Vokalen lassen sich 120mal, die acht Töne in der Musik 40320mal, und zwölf Personen an einem Tische 479001600mal versetzen.

II. Zusatz: Wenn bei einer gewissen Ordnung z. B. von sechs Dingen abcdef vier Dinge acdf ihre Stellen behalten, und nur die zwei Dinge b und e wechseln, so geben letztere zwei Versetzungen be und eb, und jede derselben läßt sich mit den obigen vier Dingen gleich vielmal versetzen: sind nun die zwei Dinge b und e ganz einerlei, so fällt davon die Hälfte weg, und die ganze Anzahl der Versetzungen wird um die Hälfte vermindert, weßhalb in diesem Falle die Anzahl derselben bei n Dingen $= \frac{1 . 2 . 3 \ldots . n}{1 . 2}$; auf diese Weise läßt z. B. das Wort Kempten 2520mal versetzen, weil der Buchstabe e zweimal vorkömmt, und $\frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7}{1 . 2} = 2520$.

III. Zusatz: Behalten bei einer gewissen Ordnung z. B. von sieben Dingen abcdefg wieder vier Dinge acfg ihre Stellen, drei Dinge aber nämlich bde wechseln, so geben solche $1 . 2 . 3 = 6$ Versetzungen für sich genommen, und jede derselben läßt sich mit jeder Ordnung obiger vier Dinge geich vielmal versetzen: sind nun letztere drei Dinge einerlei, so fallen sie in eine zusammen, mithin ist bei n Dingen, wenn eines davon dreimal vorkömmt, die Anzahl der Versetzungen $= \frac{1 . 2 . 3 . 4 \ldots (n - 1) . n}{1 . 2 . 3}$.

IV. Zusatz: Kömmt bey n Dingen ein Ding m mal, und ein anderes p mal vor, so ist aus den bei dem II. und III. Zusatze angegebenen Gründen die Anzahl aller Versetzungen $= \frac{1 . 2 . 3 . 4 \ldots . n}{1 . 2 \ldots m . 1 . 2 . 3 \ldots p}$.
Es lassen sich daher im Worte Studiosus die 9 Buchstaben, weil S dreimal, und u zweimal vorkömmt, 30240mal versetzen, indem $\frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9}{1 . 2 . 3 . 1 . 2} = 30240$.

§. 94.

II. Lehrsatz:

Die Anzahl der Amben, das ist, aller Kombinationen nach Zweien ohne Wiederholungen ist für n Dinge $= \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}$.

Beweis:

1) Aus der II. Tabelle B. leuchtet die Wahrheit des Satzes durch Induktion für 5 Dinge ein; denn

1 Ding gibt 0 Paare $= \frac{1 \cdot (1-1)}{1 \cdot 2}$,

2 Dinge geben 1 Paar $= \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2}$,

3 Dinge geben 3 Paare $= \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}$,

4 Dinge geben 6 Paare $= \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$, und

5 Dinge geben 10 Paare $= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$;

2) Ueberhaupt gibt allemal ein neues Ding, welches hinzu kömmt, so viel neue Paare, als vorher Dinge da waren, das m † 1te Ding läßt sich nämlich mit jedem der vorigen Dinge zu einem Paare verbinden, und gibt deßhalb mit den vorigen Dingen m neue Paare;

3) Gilt daher die angeführte Formel für irgend eine Anzahl m von Dingen, so gilt sie auch noch für die nächst höhere Anzahl; das ist, geben m Dinge $\frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2}$ Paare, so geben m † 1 Dinge $\frac{(m+1) \cdot m}{1 \cdot 2}$ Paare; denn

4) Wenn m Dinge $\frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2}$ Paare geben, so gibt zu diesen das neu hinzukommende Ding m neue Paare, oder die Anzahl der Amben für m † 1 Dinge

ist $= \frac{m(m-1)}{1.2} + m = \frac{m}{1} \times \left(1 + \frac{m-1}{2}\right)$
$= \frac{(m+1).m}{1.2}$;

5) Da nun für $m = 5$ die Annahme richtig ist, so gilt die Formel auch für 6 Dinge, und aus 6 für 7, und so für jede höhere Anzahl von Dingen, mithin ist allgemein bei n Dingen die Anzahl der Amben $= \frac{n.(n-1)}{1.2}$.

§. 95.

III. Lehrsatz:

Die Anzahl der Ternen, oder aller Kombinationen nach Dreien ohne Wiederholungen für n Dinge ist $= \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}$.

Beweis:

1) Nach der II. Tabelle B. gibt offenbar

1 Ding 0 Ternen $= \frac{1.(1-1)(1-2)}{1.2.3}$,

2 Dinge geben 0 Ternen $= \frac{2.(2-1)(2-2)}{1.2.3}$,

3 Dinge geben 1 Terno $= \frac{3.2.1}{1.2.3}$,

4 Dinge geben 4 Ternen $= \frac{4.3.2}{1.2.3}$, und

5 Dinge geben 10 Ternen $= \frac{5.4.3}{1.2.3}$;

2) Das folgende 6te Ding gibt zu den 10 Ternen, die man von 5 Dingen erhält, so viele neue Ternen, als 5 Dinge Amben geben, das ist, es gibt $\frac{5.4}{1.2}$ $= 10$ neue Ternen (§. 94.), mithin geben 6 Dinge $\frac{5.4.3}{1.2.3} + \frac{5.4}{1.2} = \frac{5.4}{1.2}\left(\frac{3}{3} + 1\right)$

=

$$= \frac{5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2}\left(\frac{3 + 3}{3}\right) = \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \frac{6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 20$$

Ternen;

3) Ueberhaupt gibt allemal das neue Ding, welches man beisetzet, zu den vorigen Ternen so viele neue, als die vorigen Dinge Amben geben, weil es mit jedem Ambo einen Terno, und somit das $m + 1$te Ding $\frac{m \,.\, (m - 1)}{1 \,.\, 2}$ neue Ternen gibt (§. 94.);

4) Gilt also der aufgestellte Satz für irgend eine Anzahl m von Dingen, so gilt er auch noch für die nächst höhere Anzahl $m + 1$, das ist, wenn m Dinge $\frac{m \,.\, (m - 1)\,(m - 2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ Ternen geben, so ist bei $m + 1$ Dingen die Anzahl der Ternen $= \frac{(m + 1)\, m \,.\, (m - 1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$.

Wenn nämlich m Dinge $\frac{m \,.\, (m - 1)\,(m - 2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ Ternen geben, so bekömmt man nach Nro. 3 nebst diesen, wenn noch ein Ding hinzukömmt, $\frac{m \,.\, (m - 1)}{1 \,.\, 2}$ neue Ternen, das heißt, $m + 1$ Dinge geben

$$\frac{m \,.\, (m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{m \,.\, (m-1)}{1 \,.\, 2} = \frac{m \,.\, (m-1)}{1 \,.\, 2}\left(1 + \frac{m-2}{3}\right)$$

$= \frac{(m+1)m \,.\, (m-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ Ternen.

5) Da nun nach Nro. 2. die Annahme für $m = 6$ richtig ist, so gilt der Satz auch für 7 Dinge, aus 7 für 8, und so für jede nächst größere Anzahl von Dingen, mithin ist allgemein die Anzahl der Ternen für n Dinge $= \frac{n \,.\, (n - 1)\,(n - 2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$.

1. Zusatz: Auf die nämliche Art läßt sich beweisen, daß die Anzahl der Quaternen $= \frac{n \,.\, (n-1)\,(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$, und wenn man die Induktion immer fortsetzet, so findet man, daß die Anzahl der Kombinatio-

nen nach m ohne Wiederholungen von n Dingen

$$= \frac{n.(n-1)(n-2).....n-(m-1)}{1.2.3.....m}.$$

II. Zusatz: In der gewöhnlichen Zahlen-Lotterie von 90 Zahlen gibt es 90 Auszüge, wenn nämlich nur eine Nummer gesetzt wird, ferner gibt es 4005 Amben, 117480 Ternen, und 2555190 Quaternen; da nun bei einer jeden Ziehung 5 Zahlen gehoben werden, so kommen dabei 5 Auszüge, 10 Amben, 10 Ternen, und 5 Quaternen zum Vorscheine.

Der Einsatz für alle möglichen Amben, unter denen jene 10 begriffen sind, die wirklich herauskommen, ist so berechnet, daß er den Gewinnst übersteigt. Das Nämliche gilt auch von den Auszügen, Ternen und Quaternen; um deßwillen ergibt sich bei der Lotterie mit Zuverläßigkeit kein reiner Gewinnst.

Je weniger von den möglichen Amben, Ternen rc. gesetzt werden, desto weniger Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, daß man gewinnen werde.

§. 96.

IV. Lehrsatz:

Die Anzahl aller Variationen mit Wiederholungen nach Zweien ist für n Dinge $= n^2$.

Beweis:

1) Durch Induktion erhellet die Wahrheit dieses Satzes aus der zweiten Spalte der II. Tabelle C., im Falle die Anzahl der Dinge nicht größer ist als 4; denn

1 Ding gibt 1 Variation $= 1^2$,
2 Dinge geben 4 Variationen $= 2^2$,
3 Dinge geben 9 Variationen $= 3^2$, und
4 Dinge geben 16 Variationen $= 4^2$;

2) Eben so läßt sich aus dieser Tabelle bemerken, daß allemal das neue Ding, welches hinzukömmt, nebst den schon vorhandenen Verbindungen folgende neue gibt:

a) Mit jedem der vorigen Dinge zwei, und
b) Mit sich selbst eine, weil es wiederholt werden darf;

3) Gilt daher der aufgestellte Satz für irgend eine Anzahl n von Dingen, so gilt er auch für die nächst höhere Anzahl derselben, oder für n † 1 Dinge; denn

4) Wenn n Dinge n^2 Variationen nach Zweien geben, so gibt nach Nro. 2. das neu hinzukommende n † 1te Ding 2n † 1 neue Variationen nach Zweien, mithin ist die ganze Anzahl derselben für n † 1 Dinge $= n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, also dem angeführten Gesetze gemäß (§. 1.);

5) Da nun für n = 4 das aufgestellte Gesetz gilt (Nro. 1.), so gilt es auch noch für n † 1 = 5 Dinge, aus 5 für 6, und so immer für jede nächst höhere Anzahl von Dingen, und deßhalb allgemein.

Zusatz: Weil von den 5 Stücken einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe allemal drei gegeben sein müssen, um ein unbekanntes Stück zu finden (§. 31. und §. 48.), so sind in dieser Rücksicht bei jeder dieser Reihen 10 verschiedene Fälle möglich, und weil von den übrigen zwei unbekannten Größen jede die gesuchte sein kann, so ist sowohl bei der arithmetischen, als auch bei der geometrischen Reihe die Anzahl aller möglichen Aufgaben = 20.

§. 97.

V. Lehrsatz:

Die Anzahl aller Variationen nach Dreien für n Dinge mit Wiederholungen ist $= n^3$.

1) Wenn die Anzahl der gegebenen Dinge nicht größer ist als 4, so folgt die Wahrheit des aufgestellten Satzes durch Induktion aus der II. Tabelle C.; denn
1 Ding gibt 1 Variation nach Dreien $= 1^3$,
2 Dinge geben 8 solche Variationen $= 2^3$,
3 Dinge geben 27 solche Variationen $= 3^3$, und
4 Dinge geben 64 solche Variationen $= 4^3$;

2) Aus eben dieser Tabelle läßt sich bemerken, daß ein neues Ding, welches dem vorigen beigesetzt wird, zu den schon vorhandenen Verbindungen folgende neue gibt:

a) Mit jedem Paare der vorhergehenden Dinge läßt es sich dreimal versetzen, und gibt daher dreimal

so viel neue Verbindungen, als solche Paare vorhanden sind;

b) Das neue Ding selbst, zweimal genommen, läßt sich mit jedem der vorigen Dinge dreimal versetzen, und gibt also dreimal so viel neue Verbindungen, als es vorher Dinge waren;

c) Das neue Ding endlich selbst, dreimal genommen, gibt wieder eine neue Verbindung nach Dreien;

3) Gilt nun das aufgestellte Gesetz für irgend eine Anzahl n von Dingen, so gilt es auch für die nächst höhere $n + 1$ derselben, das ist, wenn n Dinge n^3 Verbindungen nach Dreien geben, so ist bei $n + 1$ Dingen die Anzahl solcher Verbindungen $= (n + 1)^3$; denn

4) Wenn das $n + 1$te Ding dazu kömmt, so ist nach Nro. 2. a, b und c nebst den schon vorhandenen n^3 Variationen die Anzahl der neuen Verbindungen zu Dreien $= 3n^2 + 3n + 1$; weßhalb die Anzahl aller Variationen $= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n + 1)^3$, da nach §. 8. der Kubus der zweitheiligen Größe $n + 1$ oder $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$;

5) Weil nach Nro. 1. das aufgestellte Gesetz für 4 Dinge gilt, so gilt es auch, wenn $n = 4$ gesetzt wird, für 5, oder für $4 + 1 = n + 1$ Dinge, aus 5 Dingen ist dasselbe auch für 6 geltend, und so immer für die nächst höhere Anzahl von Dingen, mithin ist es allgemein giltig.

I. Zusatz: Durch ähnliche Schlüsse läßt sich darthun, daß die Anzahl der Variationen nach Vieren von n Dingen mit Wiederholungen $= n^4$, und da man diese Schlüsse immer fortsetzen kann, so ist die Anzahl der Variationen nach m mit Wiederholungen $= n^m$.

II. Zusatz: Mit zwei Würfeln, auf welchen sich auf jeder Seite so genannte Augen befinden, sind 36 Würfe möglich.

III. Zusatz: Die 9 Zahlziffern lassen sich nach Zweien 81mal versetzen; rechnet man nun jene 9 Paare dazu, wo jedem Zahlziffer die Null angehängt ist, so kann man mit 2 Ziffern 90, und also mit einem

und zwei Ziffern in allem 81 † 9 † 9 = 99 verschiedene Zahlen bezeichnen, um daher die Zahl Hundert zu schreiben, darf man nicht weniger als drei Ziffern nehmen.

IV. Zusatz: Nach Dreien erhält man aus den 9 Zahlziffern $9^3 = 729$ Variationen; ferner kann bei jedem Paare von Zahlziffern die Null in der Mitte und am Ende stehen, dieses gibt $81 \times 2 = 162$ Verbindungen; endlich kann nach jedem Zahlziffer ein Paar Nullen folgen, woraus wieder 9 Verbindungen entstehen, mithin geben die 9 arabischen Ziffern mit der Null 729 † 162 † 9 = 900 Verbindungen nach Dreien, so daß sich zusammen mit einem, zwei und drei Ziffern 900 † 99 = 999 verschiedene Zahlen ausdrücken lassen, um nun die Zahl Tausend zu schreiben, braucht man wenigstens vier Ziffern.

V. Zusatz: Nach Vieren erhält man aus den 9 Zahlziffern $9^4 = 6561$ Variationen; ferner geben die 9 Zahlziffern 729 Verbindungen zu Dreien, fügt man eine Null dazu, so kann sie die zweite, dritte und vierte Stelle einnehmen, wodurch man $729 \times 3 = 2187$ Verbindungen zu Vieren erhält; dann lassen sich die 9 Ziffern 81mal zu Zweien verbinden, fügt man nun zwei Nullen bei, so können sie bei der Verbindung zu Vieren am Ende, oder in der Mitte, oder eine Null an der zweiten, und die andere an der vierten Stelle stehen, dies gibt $81 \times 3 = 243$ neue Verbindungen; endlich kann man zu jedem der 9 Zahlziffern drei Nullen setzen, daher kann man mit einem, zwei, drei und vier Ziffern 9999 verschiedene Zahlen bezeichnen, und zur Zahl Zehentausend braucht man wenigstens fünf Ziffern, da 6561 † 2187 † 243 † 9 = 9000, und 9000 † 999 = 9999; u. s. f.

Man sieht daraus, daß im Dezimal-Systeme (I. §. 14.) das Gesetz der Sparsamkeit auf das Strengste beobachtet ist.

VI. Zusatz: Abstrahirt man von allem Inhalte der drei Sätze, aus welchen der kategorische Syllogismus besteht, und sieht man nur auf ihre Form, so

kann jeder der Form nach entweder allgemein bejahend, oder allgemein verneinend, dann partikular bejahend, oder partikular verneinend sein; zu ihrer Bezeichnung dienen die Buchstaben a, e, i und o, derer Bedeutung auch durch nachstehende Verse angezeigt wird:

Asserit a, negat e, verum generaliter ambo,
Asserit i, negat o, sed particulariter ambo.

Betrachtet man nun die beiden Prämissen, und abstrahirt man überdies von den Gesetzen der Logik, so gibt es $4^2 = 16$ verschiedene Schlußarten, die in der zweiten Spalte der II. Tabelle bei C. dargestellt sind. Nimmt man endlich auch den dritten oder Schlußsatz in Anschlag, ohne die weiteren Gesetze der Logik in Betracht zu ziehen, so erhält man $4^3 = 64$ Schlußarten, die alle in der dritten Spalte der II. Tabelle bei C. angezeigt sind.

Die Bestimmung, welche von diesen Schlußarten nach den Gesetzen der Logik giltig sind, gehört nicht in dieses Lehrbuch.

Anmerkung: Aus den Gesetzen der Größen-Verbindung lassen sich über die erstaunliche Mannigfaltigkeit, und die Abstufungen in den drei Reichen der Natur, über die Wahr- und Unwahrscheinlichkeit des Gewinnstes bei gewissen Spielen ꝛc. nützliche Reflexionen anstellen.

Verzeichniß einiger Druckfehler.

Seite	Zeile	anstatt	lese man
3	7	$2(a + b + c)^2 d$	$2(a + b + c) d$
33	22	$a^2 b$	$3a^2 b$
34	32	daher ist $\sqrt[3]{\ } =$	daher ist $\sqrt[3]{A} =$
57	8	$9^0 44^1$	$9^0 14^1$
73	7	$= S$	$= 2S$
74	24	so erhält	so erhält man
76	3	$x^2 + 2528100$	$x^2 = 2528100$
109	vorletzte	$u = 1\,{}^1/_8$	$u = 1\,{}^1/_{18}$
137	17	$\frac{b}{a} = \frac{m}{n}$	$\frac{b}{a} = \frac{n}{m}$
137	18	$\frac{d}{c} = \frac{m}{n}$	$\frac{d}{c} = \frac{n}{m}$
207	19	zur Rechten	zur Linken
207	26	zur Rechten	zur Linken

Bei Verleger dieses ist auch herausgekommen, und zu haben:

Cammerer, A. A. K. Praktische Anleitung zum Uebersetzen aus dem Deutschen ins Lateinische, nach den Regeln der kleinen Bröderschen Grammatik eingerichtet. gr. 8. Preis 1 fl.

Es fehlt keineswegs an Anleitungen, das Deutsche ins Latein zu übersetzen, aber an solchen fehlt es doch, die genau nach den Regeln der kleinen Bröderschen Grammatik, dem gewöhnlichen Schulbuche an den vaterländischen Studienanstalten, eingerichtet, und so angelegt sind, daß die früher abgehandelten Regeln fortwährend in die spätern wieder verwebt, und so dadurch dem leidigen Vergessen nach Möglichkeit vorgebeugt wurde.

Man kann dieses Buch als den umgekehrten Bröder betrachten; denn gleichwie der Hauptzweck von Bröders Gramatik dahin geht, den Schülern Fertigkeit zu geben, das Lateinische ins Deutsche zu vertieren, so sucht dieses Buch die Jugend zu der Geschicklichkeit zu führen, die gehörten und gelernten Regeln auf die vorkommenden Fälle bei dem Uebersetzen aus dem Deutschen ins Lateinische anzuwenden. Am Schluß ist noch ein Anhang beigefügt, welcher in 3 Abtheilungen, nach den Vorkenntnissen der Schuler gesteigert, 36 Themata zum Uebersetzen enthält, in welchen die früher abgehandelten Regeln vermischt vorkommen.

Dieses vortreffliche, so zweckmäßig bearbeitete Werk, das in diesem Jahre die Presse verließ, und schon in den Klassen der königl. Studienschule zu Kempten als Lehrbuch beim Unterrichte in der lateinischen Sprache eingeführt ist, verdient den Lehrern der Jugend bestens empfohlen zu werden.

Von demselben Hrn. Verfasser wird nächstens fertig:

Lehrbuch der Erdbeschreibung für die Jugend, ihre Erzieher und jeden Freund dieser angenehmen Wissenschaft. 2te durchaus verbesserte, stark vermehrte Auflage. gr. 8.

Bundschue, J. v. Gott, Anleitung zur Begründung des reesischen Ansatzes in der Lehre der geometrischen Proportionen und zur Anwendung desselben auf die im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungsfälle. 8. 1812. 45 kr.

Bundschue, J. v. Gott, Reise auf der Donau von Ulm nach Wien, und von da über Salzburg, und durch das nördliche Tirol nach Kempten, gemacht im September und Oktober 1814. 12. 1815. 45 kr.

Kurze geschichtliche Würdigung des Jesuitenordens. 8. 30 kr.

In gedrängter Kürze übergibt der Verfasser der Publizität geschichtliche Hauptzüge von den politischen Maximen, religiösen und moralischen Lehren und Grundsätzen der Jesuiten. Da über die päbstliche Wiederherstellung des Jesuitenordens schon so vieles gesprochen und geschrieben wurde, und der Unfall in Rußland, welcher diese Gesellschaft traf, zu manchen Debatten Anlaß geben kann, so wird das lesende und unbefangen prüfende Publikum diese Schrift nicht ohne Interesse aus der Hand legen.

Bayerische Staatsbibliothek München

§.

$a^{m-} \; a^{m-(n-} \; a^{m-(n-1)} b^{n-1} + \ldots\ldots + b^{m}$

$Ba^{m} \cdot a^{m-(n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b^{m}$

$B \{ \; {}^{-2} + N. + \{ ab^{m}$

$A \{ \; + M + \{ \ldots\ldots + b^{m+1}$

6. und 97.

Vari onen mit Wiederholungen nach Dreien.

aa

, ab — ae, ea — aae, eea, *eae*, *aee*, eee

db

dca — ai, ia — *aai*, iae, aie, aei

da — ei, ie — eai, iee, eie, eei

ii — iia, eii, iei, iie, iii

a l

i o — ao, o — aao, oae, aoe, *aeo*

eao, oee, eoe, eeo

eo, o — aio, oia, ioa, iao

io, oi — *eio*, oie, ioe, *ieo*

oo — iio

ooa, eoo, oeo, ooe

ed, — ooi

e, b

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bundschue, Johann von Gott, 1784-1851

Lehrbuch der Arithmetik zum Gebrauche in den Schulen und zum Selbstunterrichte

Bd.: 4

Kempten 1817

Bibl.Mont. 3651-4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10723357-6